УДК 519.242 doi: 10.26102/2310-6018/2019.24.1.020

А.А. Попов

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ АКТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЧЕТКИХ ЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

Рассматривается задача построения линейных относительно параметров и факторов регрессионных моделей для случая достаточно широких диапазонов варьирования переменных. Для восстановления зависимостей предлагается использовать нечеткие линейные регрессионные модели. Рассматривается вопрос априорного оптимального планирования эксперимента при идентификации нечетких линейных регрессионных моделей. При этом область определения действующих факторов разбивается на 2-3 нечеткие партиции. Такое модельное представление обеспечивает восстановление зависимостей, имеющих отличия на разных частях области определения входных переменных. Формулируется задача построения D-оптимального планирования эксперимента. Для построения оптимальных планов используется численный алгоритм в виде градиентного спуска. Эффективность получаемых решений контролируется выполнением необходимых и достаточных условий оптимальности. Задача построения D-оптимального плана рассмотрена для случая одного и двух факторов с числом нечетких партиций 2 и 3. Проведен анализ характеристик оптимальных планов в зависимости от ширины зоны пересечения нечетких партиций. Отмечается, что при уменьшении зоны пересечения нечетких партиций эффективность оптимальных планов повышается, что сказывается на уменьшении определителей дисперсионных матриц и их следа. Отмечаются другие характерные особенности синтезированных D-оптимальных планов. Делается вывод об эффективности активной идентификации нечетких линейных регрессионных моделей.

Ключевые слова: нечеткие регрессионные модели, функции принадлежности, оптимальное планирование эксперимента, критерий D - оптимальности

Введение

Многие теоретические и достаточно сложные проблемы анализа и планирования эксперимента к настоящему времени решены и отражены в ряде публикаций [1-7]. Экспансия методов оптимального планирования эксперимента (ОПЭ) проходила по известной схеме: от относительно простых объектов, задач к объектам более сложной природы. В этой классификационной схеме традиционно считается, что наиболее простой случай – это статические объекты, моделируемые линейными по параметрам моделями с количественными факторами (регрессионные модели). Методы ОПЭ для данного класса моделей развивались преимущественно по схеме, когда априори задавалась модель объекта и необходимо было спланировать эксперимент с целью оценивания параметров модели. В реальных ситуациях знания о модели объекта на начальном этапе исследования далеко не полны. В условиях полного или частичного незнания структуры модели объекта на практике часто применяют методику моделирования и экспериментирования по принципу от “простого” к “сложному”, например, от линейной модели к квадратичной и т.д. В соответствии с этапами усложнения модели и выбирается план эксперимента.

Основанием для использования линейной модели могут быть следующие предположения или установленные факты:

– диапазон варьирования факторов выбран достаточно малым в целях соблюдения линейного характера зависимости отклика от факторов;

– исследовано поведение отклика от всех факторов и подтверждена линейная зависимость отклика от факторов на всем рабочем диапазоне действия факторов.

Если интервал варьирования факторов выбран достаточно широким, то следует ожидать, что поведение отклика в разных частях факторного пространства будет различаться. Можно пытаться получать регрессионную зависимость в этом случае в виде модели дрейфа, когда параметры при отдельных факторах будут зависеть от других факторов [5]. В условиях, когда априори нет однозначных предположений о структуре модели объекта, часто прибегают к использованию технологии непараметрического регрессионного моделирования, когда подбор модели осуществляется по имеющимся данным. Примером такой технологии можно считать метод опорных векторов (см., например, [8-10]). Однако есть достаточно эффективная методология, позволяющая, оставаясь в рамке линейной параметрической модели получать описания поведения объекта на достаточно широких диапазонах интервалов варьирования входных переменных. Это технология нечетких регрессионных моделей, когда поведение объекта в различных частях факторного пространства моделируется отдельными локальными моделями [11-16]. Эти модели достаточно гибкие в части их подстройки под имеющиеся экспериментальные данные. Их эффективность может быть также повышена за счет использования оптимальных планов эксперимента для таких моделей. Однако теория оптимального планирования эксперимента для подобных моделей в настоящее время еще не разработана.

Материалы и методы

Основные положения теории оптимального планирования эксперимента. Предположим, что исследуемая модель наблюдения имеет вид

$$y = f^T(x)\theta + e = \sum_{l=1}^{m} f_l(x)\theta_l + e, \quad (1)$$

где $f^T(x) = (f_1(x),..., f_m(x))$ – вектор известных функций от независимой переменной $x = (x_1,...,x_k)^T$, которая может изменяться в области $\tilde{X}$; $\theta = (\theta_1,...,\theta_m)^T$ – неизвестные параметры; e – ошибка; y – значение зависимой переменной. Пусть результаты измерений являются независимыми случайными величинами с математическим ожиданием, определяемым уравнением регрессии (функцией отклика)

$$E(y / x_j) = f^T(x_j)\theta = \eta(x_j, \theta) \quad (2)$$

и дисперсией σ_j^2 в каждой точке $x_j \in \tilde{X}$, $j = \overline{1, N}$. Для ошибки e_j при $x_j \in \tilde{X}$ поэтому можно записать $E(e_j) = 0;$ $E(e_j e_k) = \sigma_j^2 \delta_{jk}$, где δ_{ik} – символ Кронекера, $j,\ k = \overline{1, N}$.

Для нахождения оценок параметров θ воспользуемся методом наименьших квадратов, который сводится к решению системы линейных уравнений

$$M\hat{\theta} = Y, \quad (3)$$

где $M = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^{-2} f(x_j) f^T(x_j)$, $Y = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^{-2} y_j f(x_j)$, $\hat{\theta}$ – оценка наименьших квадратов параметров θ. Если матрица M – невырожденная, то система (3) имеет единственное решение, которое можно записать как

$$\hat{\theta} = M^{-1} Y. \quad (4)$$

Дисперсионная матрица для оценки (4) вычисляется по формуле

$$D(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T = M^{-1}. \quad (5)$$

Матрица M в этом выражении называется информационной матрицей Фишера. Как видно из (5) и (3), дисперсионная матрица зависит от выбора точек $x_j \in \tilde{X}$, в которых проводятся наблюдения. Априорный выбор точек x_j, $j=\overline{1,N}$, в соответствии с теми или иными критериями оптимальности и есть задача оптимального планирования эксперимента.

Приведем несколько определений, связанных с категориями теории оптимального планирования эксперимента.

Определение 1. Дискретным нормированным планом ε_N называется совокупность величин $\underline{x}_1,\underline{x}_2,...,\underline{x}_n; p_1,p_2,...,p_n$, где $\sum_{i=1}^{n} p_i=1,\quad p_i=r_i/N$:

$$\varepsilon_N=\begin{Bmatrix}\underline{x}_1,\underline{x}_2,...,\underline{x}_n\\ p_1,p_2,...,p_n\end{Bmatrix},\quad \sum_{i=1}^{n} p_i=1,\ \ p_i=r_i/N,\ \ i=\overline{1,n}.$$

Для плана ε_N можно определить нормированную информационную матрицу $M(\varepsilon_N)$, связанную с информационной матрицей Фишера соотношением

$$M=N\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{-2}p_i f(\underline{x}_i)f^T(\underline{x}_i)=N\ M(\varepsilon_N)=N\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{-2}p_iM(\underline{x}_i),$$

где $M(\underline{x}_i)$ - информационная матрица одного наблюдения.

Определение 2. Непрерывным нормированным планом ε называется совокупность величин $\underline{x}_1,\underline{x}_2,...,\underline{x}_n; p_1,p_2,...,p_n$, где $\sum_{i=1}^{n} p_i=1,\ p_i\geq 0,\ i=\overline{1,n}$.

В дальнейшем, не умаляя общности, будем считать, что наблюдения равноточные, т.е. $\sigma_i^2=\sigma_j^2, \forall i,j=1,\dots n$. Для плана ε информационная матрица принимает вид

$$M(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n} p_iM(\underline{x}_i). \tag{6}$$

Выбранный определенным образом план эксперимента ε (или ε_N) позволяет в соответствии с (3), (5) улучшить точность оценивания параметров θ. Будем оценивать качество плана ε по значению некоторого функционала Ψ от информационной матрицы $M(\varepsilon)$ или соответствующей ей дисперсионной матрицы $D(\varepsilon)=M^{-1}(\varepsilon)$.

План ε^* называется Ψ***-оптимальным***, если

$$\varepsilon^*=Arg\min_{\varepsilon}\Psi[M(\varepsilon)]. \tag{7}$$

В данной работе мы будем рассматривать задачу построения D-оптимальных планов. План ε^* называется D**-оптимальным**, если $\varepsilon^* = Arg \max_{\varepsilon} \left| M(\varepsilon) \right|$. Эллипсоид рассеяния оценок параметров для D-оптимального плана имеет минимальный объем.

Необходимое и достаточное условие $D-$ оптимальности плана ε^* состоит в выполнении:

$$\max_{\underline{x} \in \tilde{X}} \varphi(\underline{x}, \varepsilon^*) = trM(\varepsilon^*) \frac{\partial \ln \left| M(\varepsilon^*) \right|}{\partial M(\varepsilon)} = trM(\varepsilon^*) M^{-1}(\varepsilon^*) = m, \qquad (8)$$

где $\varphi(\underline{x}, \varepsilon^*) = f^T(\underline{x}) M^{-1}(\varepsilon^*) f(\underline{x})$.

Построение оптимальных планов эксперимента проводится, как правило, с привлечением соответствующих численных процедур. В этом случае выполнение условий (8) достигается с некоторой допустимой точностью:

$$\left| -\min_{x \in X} \varphi(x, \varepsilon^s) + trM(\varepsilon^s) \frac{\partial \psi[M(\varepsilon^s)]}{\partial M(\varepsilon^s)} \right| \le \delta, \qquad (9)$$

где δ - малая положительная величина.

В данной работе для построения оптимальных планов будем использовать метод проекции градиента по весам точек плана. Сам спектр начального плана будет представлять собой дискретное множество точек в виде достаточно плотной сетки на $\tilde{X}$. Контролировать достижение точки экстремума будем по выполнению соотношения (9).

Нечеткие регрессионные модели. Нечеткие регрессионные модели будем задавать через дерево регрессии. Начнем с рассмотрения проблемы построения дерева регрессии по набору признаков, измеренных в шкале наименований [17].. Рассмотрим случай двух факторов. Фактор x_1 варьируется на I к уровням, которые обозначим как $A_1,...,A_I$, второй фактор x_2 варьируется на J уровнях $B_1,...,B_J$. Полное дерево решений будет состоять из $I \times J$ ветвей, каждая из которых представляет собой высказывание (правило) вида

$$\Pi_{ij}: \text{ If } (x_1 = A_i) \wedge (x_2 = B_j) \text{ then } y'_{ij...l} = \eta + \alpha_i + \beta_j. \qquad (10)$$

В высказывании Π_{ij} параметр η есть общее среднее отклика по выборке, параметр α_i - это эффект i -го уровня фактора x_1, параметр β_j -

это эффект j -го уровня фактора x_2. Проводя свертку можно записать единое уравнение наблюдения за откликом

$$y_{ij} = \eta + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, i = 1,...,I;\ j = 1,...,J \quad , \tag{11}$$

где ε_{ij} - случайная компонента. После нахождения оценки $\hat{\theta}^T = (\hat{\eta},\ \hat{\alpha}_1,...,\hat{\alpha}_I,\ \hat{\beta}_1,...,\hat{\beta}_J)$ модель принимает вид

$$\hat{\Pi}_{ij}: \text{ If } (x_1 = A_i) \wedge (x_2 = B_j) \text{ then } \hat{y}_{ij} = \hat{\eta} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j. \tag{12}$$

Пусть нет возможности четко фиксировать уровни качественных факторов. Однако допустимо для каждого фактора определить степень принадлежности к заданным классам. Набор $x_1, x_2, \ldots, x_k$ будем воспринимать как набор лингвистических переменных (ЛП), значения которых определяются нечеткими множествами $A, B, \ldots, Г$, а степень интенсивности проявления значения будем задавать в виде значения функций принадлежности. Ветви решений имеют вид [17]

$$\begin{gathered} \Pi_{ij..l}: \mathit{If} \quad (x_1 \ is \ A_i) \wedge (x_2 \ is \ B_j) \ \wedge ... \wedge (x_k \ is \ \Gamma_l) \text{ then} \\ y'_{ij...l} = \eta + \alpha_i + \beta_j + ... + \gamma_l. \end{gathered} \tag{13}$$

Истинность высказываний $(x_1 \ is \ A_i),\ (x_2 \ is \ B_j),\ ....,(x_k \ is \ \Gamma_l)$ определяется значениями соответствующих функций принадлежности $\mu_{A_i} \in [0,\ 1],\ \mu_{B_j} \in [0,\ 1], \ldots, \mu_{\Gamma_l} \in [0,\ 1]$. В силу этого в дереве решений (13) не ложным будет не одно, а несколько высказываний. Степень истинности высказывания $\Pi_{ij...l}$ будем обозначать как $\mu(y'_{ij..l})$ и вычислять ее как $\mu(y'_{ij..l}) = \mu_{A_i}\mu_{B_j} \cdots \mu_{\Gamma_l}$. Относительно назначения значений $\mu_{A_i}, \mu_{B_j}, \ldots, \mu_{\Gamma_l}$ внесем требование что для каждого наблюдения выполняются условия:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{I} \mu_{A_i} = 1,\ \sum_{j=1}^{J} \mu_{B_j} = 1,\ ...\ ,\ \sum_{l=1}^{L} \mu_{\Gamma_l} = 1; \\ \mu_{A_i} \in [0,1],\ i = \overline{1, I},\ \mu_{B_j} \in [0,1],\ j = \overline{1, J},\ \ldots,\ \mu_{\Gamma_l} \in [0,1],\ l = \overline{1, L}. \end{gathered} \tag{14}$$

Процедура дефазификации проводится по схеме

$$y_{ij...l} = \sum \mu(y'_{ij...l}) y'_{ij...l} \,/\, \sum \mu(y'_{ij...l}). \tag{15}$$

С учетом (14) дерево решений (13) можно представить в виде модели наблюдения

$$y_{ij\ldots l} = \eta + \sum_{i=1}^{I} \mu_{A_i} \alpha_i + \sum_{j=1}^{J} \mu_{B_j} \beta_j + \ldots + \sum_{l=1}^{L} \mu_{\Gamma_l} \gamma_l + \varepsilon_{ij\ldots l}. \quad (16)$$

После нахождения оценки $\hat{\theta}^T = (\hat{\eta},\ \hat{\alpha}_1,\ldots,\hat{\alpha}_I,\ \hat{\beta}_1,\ldots,\hat{\beta}_J,\ldots,\hat{\gamma}_1,\ldots,\hat{\gamma}_L)$ для вектора параметров θ дерево решений можно зафиксировать как

$$\begin{array}{l} \hat{\Pi}_{ij..l}:\ If\ \ (x_1\ is\ A_i) \wedge (x_2\ is\ B_j)\ \wedge \ldots \wedge (x_k\ is\ \Gamma_l)\ \text{then} \\ \hat{y}'_{ij\ldots l} = \hat{\eta} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \ldots + \hat{\gamma}_l. \end{array} \quad . \quad (17)$$

Его также можно представить в виде свертки

$$\hat{y}\ = \hat{\eta} + \sum_{i=1}^{I} \mu_{A_i} \hat{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{J} \mu_{B_j} \hat{\beta}_j + \ldots + \sum_{l=1}^{L} \mu_{\Gamma_l} \hat{\gamma}_l. \quad (18)$$

Рассмотренные приемы представления деревьев решений в виде высказываний (12) и (17) можно распространить на случай использования объясняющих переменных, измеренных в количественной шкале. В самом простом варианте можно действовать по схеме использования лингвистических переменных, рассмотренной выше. Для упрощения изложения рассмотрим частный случай, когда число входных факторов равно двум. Разобьем области действия количественных переменных $x_1,\ x_2$ на нечеткие партиции, которые, как и ранее, для первого фактора будем обозначать через $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_I$ с соответствующими функциями принадлежности $\mu_{1i} \in [0,1],\ i = \overline{1,I}$. Аналогично для фактора x_2 это будут партиции $B_1,\ B_2,\ldots,\ B_J$ с функциями принадлежности. Представление дерева решений в виде (13) означает, что мы в листьях дерева описываем количественный отклик его локальным средним. В теории нечетких систем подобные модели называют моделью синглтона. Сейчас мы модель синглтона не будем затрагивать. Мы будем исходить из того, что на отдельных достаточно широких интервалах действия количественных факторов поведение отклика системы можно описывать линейной зависимостью. В этом случае сложность дерева можно уменьшить, если попытаться заменить представление отклика в листьях дерева, например, на линейную зависимость его от входных факторов. Дерево решений от двух факторов в этом случае будет состоять из ветвей вида

$$\begin{array}{l} \Pi_{ij}:\ If\ \ (x_1\ is\ A_i) \wedge (x_2\ is\ B_j)\ \ \text{then} \\ y'_{ij} = \theta_0 + \theta_{01i} + \theta_{02j} + (\theta_1 + \theta_{11i} + \theta_{12j})x_1 + (\theta_2 x_2 + \theta_{21i} + \theta_{22j})x_2. \end{array} \quad (19)$$

Здесь часть слагаемых, а именно, $\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$ входит в каждую ветвь дерева и определяет общую линейную зависимость отклика от входных факторов на всей области их определения без учета разбиения ее на партиции. Фактическое локальное представление отклика будет определяться отклонениями от общей линейной зависимости. В свободном члене эти отклонения задаются величиной $\theta_{01i}+\theta_{02j}$, изменения в параметре θ_1 определяются величиной $\theta_{11i}+\theta_{12j}$, изменения в параметре θ_2 определяются величиной $\theta_{21i}+\theta_{22j}$. С учетом (14) дерево решений (19) можно представить в виде модели наблюдения

$$y_{ijl}=\theta_0+\sum_{i=1}^{I}\mu_{1i}\theta_{01i}+\sum_{j=1}^{J}\mu_{2j}\theta_{02j}+(\theta_1+\sum_{i=1}^{I}\mu_{1i}\theta_{11i}+\sum_{j=1}^{J}\mu_{2j}\theta_{12j})x_1+$$
$$+(\theta_2+\sum_{i=1}^{I}\mu_{1i}\theta_{21i}+\sum_{j=1}^{J}\mu_{2j}\theta_{22j})x_2+\varepsilon_{ijl}. \quad (20)$$

После оценивания параметров θ дерево решений в виде свертки принимает вид

$$\hat{y}=\hat{\theta}_0+\sum_{i=1}^{I}\mu_{1i}\hat{\theta}_{01i}+\sum_{j=1}^{J}\mu_{2j}\hat{\theta}_{02j}+(\hat{\theta}_1+\sum_{i=1}^{I}\mu_{1i}\hat{\theta}_{11i}+\sum_{j=1}^{J}\mu_{2j}\hat{\theta}_{12j})x_1+$$
$$+(\hat{\theta}_2+\sum_{i=1}^{I}\mu_{1i}\hat{\theta}_{21i}+\sum_{j=1}^{J}\mu_{2j}\hat{\theta}_{22j})x_2. \quad (21)$$

Представим модель наблюдения (20) в матричном виде

$$y=X\theta+\varepsilon, \quad (22)$$

где $X-(n\times p)-$ матрица наблюдения, порождаемая регрессорами из (21). По причине введения нормировки (14) можно ожидать, что матрица наблюдений X будет неполного ранга. Идентифицируемость модели будет обеспечена, если мы проведем ее редукцию, удалив из состава регрессоров, соответствующие линейно зависимым столбцам матрицы наблюдения X. Например, можно удалить из модели регрессоры μ_{1I}, μ_{2J}, а также $\mu_{1I}x_1$, $\mu_{1I}x_2$, $\mu_{2J}x_1$, $\mu_{2J}x_2$. Обоснование данной методики обеспечения идентифицируемости модели можно найти в работах [17, 18].

Результаты и обсуждения

Для классических линейных и полиномиальных моделей предложено множество самых разных планов (см., например, [2]). Как правило, в целях их сравнения они синтезировались на стандартных областях определения входных факторов, а именно, каждый фактор варьировался на отрезке

$[-1,+1]$. При реализации планов на практике осуществляют перевод шкалы $[-1,+1]$ на фактические интервалы варьирования факторов. При рассмотрении нечетких регрессионных моделей при априорном построении оптимальных планов нам необходимо выдвинуть предположения о количестве, форме и расположении нечетких партиций для каждого фактора. На данный момент ограничимся рассмотрением линейных локальных моделей. Для таких локальных моделей использование даже только двух нечетких партиций позволяет получать в общем случае более сложные зависимости чем, например, при использовании полинома второй степени. Использование трех партиций позволяет получать описания, характерные уже для полиномов третьей степени. Будем предполагать, что в области малых значений факторов характер зависимости отклика отличается от характера зависимости в области больших значений, например, углом наклона. В случае рассмотрения трех партиций таких областей с различным характером зависимости отклика уже будет три по каждому фактору. Что касается формы функции принадлежности, то наиболее предпочтительной для рассматриваемых задач является трапециевидная форма. Пример таких функций принадлежности приведен на Рисунке 1.

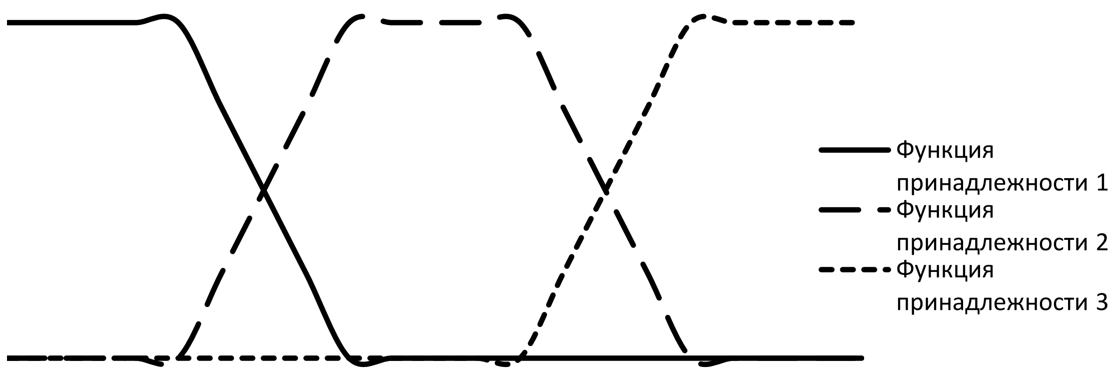

Рисунок 1. Пример разбиения области определения фактора на три партиции

К категории «форма партиции» следует также отнести координаты точек пересечения соседних нечетких партиций и ширину зоны их пересечения. В силу симметричности области определения факторов относительно нуля будем размещать нечеткие партиции также симметрично относительно нулевого значения. На Рисунке 1 точки пересечения партиций равны $\pm 0,4$. Координату точки пересечения партиций будем обозначать как $\bar{x}_{\mu}$. Ширина области пересечения там, где смежные функции принадлежности имеют одновременно не нулевые значения для приведенных примеров, равна 0,8 и 0,4 соответственно. Будем обозначать половинную ширину области пересечения как Δ. Ширина области пересечения партиций напрямую влияет на плавность перехода регрессионной зависимости от одной локальной модели к другой.

Для классической линейной модели $D-$оптимальный план эксперимента сосредоточен на концах отрезка $[-1,+1]$. Эти точки +1 и –1 будем называть характерными. Они и составляют спектр оптимального плана. Для квадратичной модели в число таких точек добавляется точка 0. Для нечетких моделей с двумя и тремя партициями характерными точками можно считать точки с координатами $\bar{x}_{\mu}$, $\pm\bar{x}_{\mu} \pm \Delta$.

Для случая двух партиций нечеткая регрессионная модель с одним входным фактором имеет вид

$$E(y/x) = f^T(x)\theta = \theta_0 + \theta_1 x + \mu_1(x)\theta_{01} + \mu_1(x)\theta_{11}x \quad ,$$

где $f^T(x) = (1, x, \mu_1(x), \mu_1(x)x)$.

Для случая трех партиций она приобретает вид

$$E(y/x) = f^T(x)\theta = \theta_0 + x\theta_1 + \mu_1(x)\theta_{01} + \mu_2(x)\theta_{02} + \mu_1(x)x\theta_{11} + \mu_2(x)x\theta_{12},$$

где $f^T(x) = (1, x, \mu_1(x), \mu_2(x), \mu_1(x)x, \mu_2(x)x)$

В Таблицах 1, 2 в столбцах, озаглавленных как «Спектр и веса точек $D-$оптимального плана», приведены веса точек спектра $D-$оптимальных планов для линейной модели с 2 и 3 партициями, а также величины определителя информационной матрицы и следа дисперсионной матрицы. Планы строились с использованием метода проекции градиента по весам точек. Точность выполнения необходимых и достаточных условий оптимальности (9) обеспечивалась на уровне $\delta = 1*10^{-3}$. Планы симметричны и веса точек, симметричных относительно нуля, совпадают. Характерно, что спектры оптимальных планов составляют обозначенные выше характерные точки.

Таблица 1. Характеристики $D-$оптимального плана для линейной нечеткой модели с двумя партициями, $\bar{x}_\mu = 0$.

Δ	Спектр и веса точек $D-$оптимального плана			$\lvert M(\varepsilon^*)\rvert$	$trM^{-1}(\varepsilon^*)$
	$-1,+1$	$\bar{x}_\mu - \Delta, \bar{x}_\mu + \Delta$	$\bar{x}_\mu$		
0,4	0,2428	0,1941	0,1262	$0,581*10^{-3}$	93,73
0,3	0,2484	0,2308	0,0416	$0,946*10^{-3}$	73,57
0,2	0,25	0,25	0	$0,160*10^{-2}$	57,0
0,1	0,25	0,25	0	$0,256*10^{-2}$	44,59

Таблица 2. Характеристики $D-$оптимального плана для линейной нечеткой модели с тремя партициями, $\bar{x}_\mu = 0,3$

Δ	Спектр и веса точек $D-$оптимального плана				$\lvert M(\varepsilon^*)\rvert$	$trM^{-1}(\varepsilon^*)$
	$-1,+1$	$-\bar{x}_\mu - \Delta, \bar{x}_\mu + \Delta$	$-\bar{x}_\mu + \Delta, \bar{x}_\mu - \Delta$	$-\bar{x}_\mu, +\bar{x}_\mu$		
0,2	0,1651	0,1525	0,0893	0,0931	$0,769*10^{-7}$	449,74
0,15	0,1663	0,1629	0,1505	0,0203	$0,177*10^{-6}$	378,16
0,1	0,1666	0,1666	0,1666	0	$0,444*10^{-6}$	288,67
0,05	0,1666	0,1666	0,1666	0	$0,956*10^{-6}$	228,37

Как можно видеть из анализа Таблиц 1, 2 при уменьшении ширины зоны пересечения нечетких партиций эффективность оптимальных планов существенно увеличивается. Это вполне объяснимо, поскольку длина отрезков, на которых функция принадлежности для каждой из партиций имеет значение равное 1, растет.

Непрерывные оптимальные планы на практике, как правило, не применяются в силу того, что для их полной реализации может потребоваться очень большое число наблюдений. На практике применяют дискретные оптимальные планы, которые строятся для заданного числа наблюдений. Для их построения можно использовать комби-градиентный алгоритм [2] или алгоритм последовательного добавления точек в план [19,20]. В силу того, что при относительно малой ширине зоны пересечения партиций веса точек спектра непрерывного $D-$оптимального плана близки или равны, то следует ожидать, что в состав точек дискретного плана будут в основном включаться точки спектра непрерывного плана. Например, для модели с двумя партициями и $\Delta = 0,3$ в дискретный план с 4 наблюдениями вошли следующие точки: $\{$-1, -0.3, 0.3, 1$\}$. Характеристики этого плана: $\left|M(\varepsilon^*)\right| = 0,937*10^{-3}$, $trM^{-1}(\varepsilon^*) = 75,67$ близки к характеристикам непрерывного оптимального плана из Таблицы 1.

При рассмотрении многофакторных моделей и $D-$оптимальных планов для них можно наблюдать те же отмеченные закономерности. Рассмотрим для примера случай двухфакторной модели.

$$E(y/x) = f^T(x)\theta = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \mu_{11}(x_1)\theta_3 + \mu_{21}(x_2)\theta_4 + \mu_{11}(x_1)x_1\theta_5$$
$$+\mu_{21}(x_2)x_1\theta_6 + \mu_{11}(x_1)x_2\theta_7 + \mu_{21}(x_2)x_2\theta_8.$$

При половинной ширине зоны пересечения $\Delta = 0,2$ и двух партициях спектр оптимального плана составит полный факторный эксперимент из 16 точек с уровнями варьирования по каждому фактору $\{$-1; -0,2;0,2; +1$\}$. Веса точек различаются в зависимости от того угловые они или лежат на ребрах: веса точек угловых точек $(\pm1,\pm1)$ равны 0,05906, в точках $(\pm1,\pm0,2)$ и $(\pm0,2,\pm1)$ вес равен 0,07915, в точках $(\pm0,2,\pm0,2)$ вес равен 0,03261.

Заключение

Предложена методология априорного планирования эксперимента при построении линейных регрессионных моделей в рамках концепции нечетких систем. Выявлены характерные особенности получаемых оптимальных планов для линейных нечетких регрессионных моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисов В. И. Математическое обеспечение системы ЭВМ – экспериментатор. – М.: Наука, 1977. – 252 с.
2. Денисов В.И., Попов А.А. Пакет программ оптимального планирования эксперимента. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 159 с.
3. Круг Г.К., Сосулин Ю.А., Фатуев В.А. Планирование эксперимента в задачах идентификации и экстраполяции. – М.:Наука, 1977. – 208 с.
4. Математическая теория оптимального планирования эксперимента/ Под. ред. С.М. Ермакова. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
5. Налимов В.В., Голикова Т.И. Логические основания планирования эксперимента. – М.: Металлургия, 1981. – 151 с.
6. Федоров В.В. Теория оптимального планирования эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 312 с.
7. Попов А.А. Оптимальное планирование эксперимента в задачах структурной и параметрической идентификации моделей многофакторных систем: монография / А.А. Попов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2013. – 296 с.
8. Попов А.А., Саутин А.С. Определение параметров алгоритма опорных векторов при решении задачи построения регрессии // Сборник научных трудов НГТУ. Новосибирск. – 2008. –№2(52). –С. 35–40.
9. Popov A.A., Sautin A.S. Selection of support vector machines parameters for regression using nested grids // The Third International Forum on Strategic Technology. Novosibirsk, 2008. pp. 329–331.
10. Попов А.А., Бобоев Ш.А. Построение регрессионных зависимостей с использованием квадратичной функции потерь в методе опорных векторов // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. –2015. –№ 3 (81). –С. 69–78.
11. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics. 1985. V. 15. No. 1. pp. 116–132.
12. R. Babuska. Fuzzy Modelling for Control. London. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 257 P.
13. John H. Lilly. Fuzzy Control and Identification. Wiley, 2010. –231 P.
14. А. Пегат. Нечеткое моделирование и управление. Пер. с англ. -2-е изд. Москва: Изд-во Бином, 2013. —798 с.
15. Попов А. А. Регрессионное моделирование на основе нечетких правил / А. А. Попов // Сборник научных трудов НГТУ, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000 N2(19). - С. 49-57.

16. Popov A.A., Bykhanov K.V. Modeling volatility of time series using fuzzy GARCH models / Proceedings - 9th Russian-Korean International Symposium on Science and Technology, KORUS-2005 sponsors: Novosibirsk State Technical University. Novosibirsk, 2005. – pp. 687-692.
17. Попов А. А. Построение деревьев решений для прогнозирования количественного признака на классе логических функций от лингвистических переменных / А. А. Попов // Научный вестник НГТУ. – 2009. – № 3 (36). – С. 77–86.
18. Попов А. А. Конструирование дискретных и непрерывно-дискретных моделей регрессионного типа / А. А. Попов // Сборник научных трудов НГТУ. – 1996. – Вып. 1. – С. 21–30.
19. Попов А.А. Последовательные схемы построения оптимальных планов эксперимента // Сб. научных трудов НГТУ. Новосибирск,1995. Вып. 1. С. 39–44.
20. Попов А.А. Последовательные схемы синтеза оптимальных планов эксперимента // Доклады Академии наук высшей школы России. –2008. –№ 1 (10). –С. 45–55.

A.A.Popov

OPTIMAL DESING OF THE EXPERIMENT WITH THE ACTIVE IDENTIFICATION OF FUZZY LINEAR REGRESSION MODELS

Novosibirsk State Technical University,

Novosibirsk, Russia

The problem of constructing linear regression models with respect to parameters and factors for the case of sufficiently wide ranges of variable variation is considered. It is proposed to use fuzzy linear regression models to restore the dependencies. The problem of a priori optimal experiment planning for fuzzy linear regression model's identification is considered. At the same time, the area of determining the acting factors is divided into 2-3 fuzzy partitions. This model representation provides the restoration of dependencies which differ in different parts of the region determination of the input variables. The problem of construction and optimal planning of the experiment is formulated. A numerical algorithm in the form of gradient descent is used to construct optimal plans. The effectiveness of the obtained solutions is controlled by the implementation of the necessary and sufficient conditions of optimality. The problem of constructing an optimal plan is considered for the case of one and two factors with the number of fuzzy partitions 2 and 3. The analysis of the characteristics of optimal plans depending on the width of the intersection zone of fuzzy partitions is carried out. It is noted that with a decrease in the zone of intersection of fuzzy partitions, the efficiency of optimal plans increases, which affects the reduction of the determinants of dispersion matrices and their trace. Other characteristic features of the synthesized-optimal plans are noted. The *conclusion is made about the efficiency of active identification of fuzzy linear regression models*

Keywords: fuzzy regression, membership function, optimal design of experiment, the criterion of optimality

REFERENCES

1. Denisov V.I. Matematicheskoe obespechenie sistemy EHVM – ehksperimentator. – M.: Nauka, 1977. – 252 s.
2. Denisov V.I., Popov A.A. Paket programm optimal'nogo planirovaniya ehksperimenta. – M.: Finansy i statistika, 1986. – 159 s.
3. Krug G.K. Sosulin Y.A. Fatuev V.A. Planirovanie ehksperimenta v zadachah identifikacii i ehkstrapolyacii. – M. Nauka 1977. – 208 s.
4. Matematicheskaya teoriya optimal'nogo planirovaniya ehksperimenta/ Pod. red. S.M. Ermakova. M.: Nauka, 1983. 392 s.
5. Nalimov V.V., Golikova T.I. Logicheskie osnovaniya planirovaniya ehksperimenta. M.: Metallurgiya, 1981. 151 s.
6. Fedopov V.V. Teopiya optimal'nogo planipovaniya ehkspepimenta. – M.: Hauka, 1971. – 312 s.
7. Popov A.A. Optimal'noe planirovanie ehksperimenta v zadachah strukturnoj i parametricheskoj identifikacii modelej mnogofaktornyh sistem: monografiya / A.A. Popov. – Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2013. – 296 s.
8. Popov A.A., Sautin A.S. Opredelenie parametrov algoritma opornyh vektorov pri reshenii zadachi postroeniya regressii // Sbornik nauchnyh trudov NGTU. Novosibirsk. – 2008. –№2(52). –S. 35–40.
9. Popov A.A., Sautin A.S. Selection of support vector machines parameters for regression using nested grids // The Third International Forum on Strategic Technology. Novosibirsk, 2008. pp. 329–331.
10. Popov A.A., Boboev SH.A. Postroenie regressionnyh zavisimostej s ispol'zovaniem kvadratichnoj funkcii poter' v metode opornyh vektorov // Sbornik nauchnyh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. –2015. –№ 3 (81). –S. 69–78.
11. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics. 1985. V. 15. No. 1. pp. 116–132.
12. R. Babuska. Fuzzy Modelling for Control. London. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 257 P.
13. John H. Lilly. Fuzzy Control and Identification. Wiley, 2010. –231 P.

14. A. Pegat. Nechetkoe modelirovanie i upravlenie. Per. s angl. -2-e izd. Moskva: Izd-vo Binom, 2013. —798 s.
15. Popov A. A. Regressionnoe modelirovanie na osnove nechetkih pravil / A. A. Popov // Sbornik nauchnyh trudov NGTU, Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2000 N2(19). - S. 49-57.
16. Popov A.A., Bykhanov K.V. Modeling volatility of time series using fuzzy GARCH models / Proceedings - 9th Russian-Korean International Symposium on Science and Technology, KORUS-2005 sponsors: Novosibirsk State Technical University. Novosibirsk, 2005. – pp. 687-692.
17. Popov A. A. Postroenie derev'ev reshenij dlya prognozirovaniya kolichestvennogo priznaka na klasse logicheskih funkcij ot lingvisticheskih peremennyh / A. A. Popov // Nauchnyj vestnik NGTU. –2009. – № 3 (36). – S. 77–86.
18. Popov A. A. Konstruirovanie diskretnyh i nepreryvno-diskretnyh modelej regressionnogo tipa / A. A. Popov // Sbornik nauchnyh trudov NGTU. – 1996. – Vyp. 1. – S. 21–30.
19. Popov A.A. Posledovatel'nye skhemy postroeniya optimal'nyh planov ehksperimenta // Sb. nauchnyh trudov NGTU. Novosibirsk,1995. Vyp. 1. S. 39–44.
20. Popov A.A. Posledovatel'nye skhemy sinteza optimal'nyh planov ehksperimenta // Doklady Akademii nauk vysshej shkoly Rossii. –2008. –№ 1 (10). –S. 45–55.