УДК 519.865.7 doi: 10.26102/2310-6018/2019.24.1.002

Е.В. Болнокина, С.А. Олейникова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СОСТАВА ИСПОЛНИТЕЛЕЙ ДЛЯ МНОГОСТАДИЙНОЙ ОБСЛУЖИВАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Воронежский государственный технический университет

Объектом исследования в работе являются многостадийные системы, на вход которых поступает поток заявок, требующих для своего обслуживания выполнения множества последовательно-параллельных работ. Предметом исследования является оптимизация задачи назначения исполнителям работ в такой системе. Целью работы заключается в формализации исследуемой задачи с учетом человеческого фактора при совместном выполнении работ группой исполнителей. Исследование особенностей задачи показало невозможность использования классических подходов (в частности, венгерского метода и методов решения задач целочисленного программирования) для ее решения. В связи с этим возникла необходимость разработки собственного специализированного математического и алгоритмического аппарата. В результате предложена формализация задачи, включающая нелинейную целевую функцию и рекурсивные ограничения. Специфика математического аппарата потребовала использования соответствующего алгоритмического обеспечения для ее решения. За основу была взята методика алгоритмов с возвратом. Представлена общая идея алгоритма, базирующаяся на методе ветвей и границ. Таким образом, получено формальное описание задачи назначений исполнителям работ с учетом имеющихся особенностей системы, а также представлен общий алгоритм ее решения. Детализация и программная реализация алгоритма позволят повысить эффективность принятия управленческих решений за счет оптимизации выбора коллектива исполнителей для каждой из работ.

Ключевые слова: организационное управление, задача о назначениях, многостадийная обслуживающая система, формализация, алгоритм

Введение

Исследуются многостадийные производственные системы, на вход которых поступает поток заявок, требующих выполнения взаимно-зависимых работ. Предполагается, что решение любой задачи требует выполнения множества последовательно-параллельных операций, каждая из которых может быть выполнена некоторым коллективом исполнителей. Каждый исполнитель имеет некоторые предпочтения относительно выполнения работы с другими исполнителями, что сказывается на качестве обслуживания. Предметом исследования является определение такого состава исполнителей для выполнения каждой работы, который позволяет достичь оптимальной производительности системы в целом.

Частные случаи данной задачи достаточно полно исследованы, и получены соответствующие решения. Задача определения n исполнителей для n работ является классической задачей о назначениях. Широко известен венгерский метод решения данной задачи. Кроме того, существует подход, позволяющий описать ее средствами линейного программирования.

Однако, исследуемая задача имеет несколько особенностей, которые обуславливают необходимость разработки новых подходов для ее решения. Это, в частности, требование о выполнении работы несколькими исполнителями и наличие взаимной зависимости между работами. На основании этих причин исследуемая задача уже не может быть описана средствами линейного программирования. В связи с этим, стандартные методы решения должны быть модернизированы с учетом человеческого фактора. Кроме того, наличие взаимной зависимости между работами осложняет требование оценки качества работы. Это связано с тем, что непосредственно предшествующие операции будут напрямую влиять на качество выполнения данной работы.

Таким образом, формализация задачи выбора оптимального состава исполнителей и разработка алгоритма ее решения является актуальной и практически значимой.

1. Постановка задачи и ее особенности

Рассматривается задача организационного управления системой, отличительными особенностями которой является множество взаимно-зависимых работ. Каждая работа требует для своего выполнения заданного числа исполнителей, причем каждый исполнитель выполняет ее с определенной средней эффективностью. В общем случае любой исполнитель может выбрать одно из множества действий, в результате чего выполненная им (вместе с коллегами) работа получается некоторого качества. Предполагается, что число исполнителей m достаточно для выполнения всех работ n. Необходимо назначить исполнителей на работы таким образом, чтобы суммарное качество выполненных работ (или качество готовой заявки) было бы максимальным.

Рассмотрим особенности данной задачи. Существует классическая задача о назначениях, которая решает оптимизационную задачу распределения n исполнителей по n работам при условии, что для каждого исполнителя задан некоторый показатель эффективности выполнения работы. По сравнению с классическим случаем, задача обладает целым рядом особенностей. К ним, в первую очередь, следует отнести совместное исполнение несколькими исполнителями определенной операции. Данная особенность должна быть учтена в силу следующих причин. В-первых, результат выполнения работы коллективом исполнителей есть некоторый показатель, который включает в себя вклад каждого исполнителя. Следовательно, эффективное распределение таких исполнителей может повысить данный показатель и, наоборот. Во-вторых, работа в коллективе всегда накладывает некоторые личные предпочтения. В случае комфортного сотрудничества между исполнителями их совместный результат будет лучше. Верно и обратное: при негативном отношении друг другу исполнителей крайне сложно ожидать работу высокого качества. В такой ситуации, как правило, уменьшается и производительность каждого отдельного исполнителя. Поэтому учет человеческого фактора крайне важен при решении исследуемой задачи.

Другая особенность связана с наличием взаимосвязей между работами. Как было отмечено в [1], качество одной работы является основой для расчета качества выполнения непосредственно связанных с ней работ.

Таким образом, существуют особенности, которые не были исследованы при решении аналогичных задач. Они не позволяют использовать существующие подходы к решению задачи. В частности, целевая функция и ограничения уже не будут описываться линейными зависимостями. В связи с этим, необходима формализация поставленной задачи и разработка алгоритма ее решения.

2. Анализ существующих подходов к решению задачи стимулирования

Рассмотрим частный случай решения данной задачи. Предположим, что имеется n исполнителей, которых необходимо закрепить за n работами. Пусть известна производительность исполнителя i при выполнении работы j. В результате получится матрица размера $n \times n$, которая служит в качестве целевой функции.

Очевидно, что в данном случае имеется n! разных допустимых решений. Существующие методы предназначены для сужения числа перебираемых решений.

Классическая задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи (когда запасы поставщиков и требования потребителей равны 1). Для решения транспортной задачи существуют такие методы решения, как метод потенциалов, метод северо-западного угла. Поэтому транспортную задачу можно также решать данными методами. Но более эффективным методом решения данной задачи является венгерский метод [2, 3]. Его суть заключается в последовательном переходе от исходной матрицы к эквивалентной ей матрице, содержащую так называемую систему из n независимых нулей. Это означает, что никакие два нуля не принадлежат одной строке или одному столбцу. Иными словами, каждая строка и каждый столбец новой матрицы должен содержать единственный ноль. Ячейка, содержащая данный ноль, определяет соответствие между исполнителями и работами (строка – исполнитель; столбец - работа).

Поскольку целевая функция и ограничения данной задачи линейны, возможна ее запись в виде задачи линейного программирования. В частности, формализация получается, если ввести обозначения x_{ij}, показывающие будет ли исполнитель i выполнять работу j (значение 1) или нет (значение 0). В результате получим:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i = 1,...,n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall j = 1,...,n \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases} \tag{1}$$

Известна также обобщенная задача о назначениях. Она также является обобщенной задачей о ранце. В этой задаче множество исполнителей имеет размер, не совпадающий с размером числа работ. Задана матрица затрат w_{ij}, каждый элемент которой показывает затраты исполнителя i при выполнении работы j. Кроме того задан доход c_{ij}, который может быть получен при выполнении исполнителем i работы j. Необходимо оптимальным образом распределить работы исполнителям.

Известно, что данная задача является NP-трудной. В связи с этим, осуществляются различные попытки построения приближенных и эвристических алгоритмов для ее решения [4,5]. В частности, была предложена жадная стратегия поиска распределения работ по исполнителям.

Однако, исследуемая задача по сравнению с обобщенной задачей о назначениях осложняется тем, что качество выполнения работы можно определить лишь, зная выполненные действия каждого исполнители и качество всех предшествующих работ. В силу того, что это невозможно, необходимо разрабатывать собственный аппарат, позволяющий с той или иной точностью предложить приемлемое решение.

3. Формализация задачи

Для формализации задачи исследуем более детально составляющие, которые влияют на качество выполнения отдельной работы j. В первую очередь из-за взаимной зависимости это будет качество непосредственно предшествующих ей работ. Кроме того, как отмечалось выше, на результат работы оказывает влияние каждый из исполнителей. В зависимости от выбранного им действия, получим определенный уровень качества.

Опишем исследуемую задачу математически. Как и в классической задаче, введем в рассмотрение переменные x_{ij}, которые будут определяться следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если i будет выполнять работу j} \\ 0, \textit{в противном случае} \end{cases} \tag{2}$$

Пусть также дана матрица «комфорта», каждый элемент k_{ij} которой показывает степень комфорта работы исполнителя i с исполнителем j.

Предполагается также, что каждый исполнитель может выполнить одно из L действий, которые приведут к тому или иному выполнению им своей работы. Пусть для каждой работы j сформирована функция H_j, которая описывает результат выполнения работы j в зависимости от действий исполнителей и качества предыдущих работ. Без ограничения общности, пусть данная величина складывается из двух составляющих:

- качества всех предшествующих работ;
- качество исполнения данной работы.

Тогда качество можно описать формулой:

$$H_j = \psi_j + RES\left(j, a_{i_1}, \ldots, a_{i_j}\right) \tag{3}$$

Здесь ψ_j– суммарное качество всех работ, предшествующих работе j; $RES(j, a_{i1}, \ldots, a_{ij})$ – результат, полученный в ходе выбора исполнителем i_1 действия a_{i1}; исполнителем i_2 – действия a_{i2} и т.д. Вид функции ψ_j был определен в [1]:

$$\psi_j = \begin{cases} 0, \textit{ j не имеет предшественников} \\ \sum_{k=1}^{m} H_k \cdot \alpha_k, \textit{иначе} \end{cases} \tag{4}$$

Коэффициенты α_k будут указывать степень влияния качества предшествующей работы k на качество работы j. Они должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} 0 \le \alpha_k \le 1 \\ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1 \end{cases} \qquad (5)$$

Функция *RES*() зависит от того, какие исполнители и каким образом выполнят данную работу. Пусть в общем случае имеется некоторая функция f_j, определяющая вклад каждого исполнителя в итоговый результат. В простейшем случае, это может быть линейная зависимость:

$$f_j(W_j) = \sum_{i \in W_j} c_{ij} \qquad (6)$$

Тогда эффективность выполнения работы j может быть описана следующей формулой:

$$RES(j, a_{i_1}, ..., a_{i_j}) = f_j(W_j) \cdot k_{W_j} \qquad (7)$$

Здесь k_{Wj} – коэффициент, показывающий степень комфорта работы коллектива исполнителей $w_1,\ldots,w_K$, составляющих некоторое множество W_j. Формула (7) показывает, что если исполнителям множества W_j комфортно работать друг с другом, то их производительность повышается, и наоборот. В данном случае зависимость от степени комфорта исполнителей линейная.

Таким образом, если работа j не имеет предшественников, то функция H будет зависеть только от качества совместного исполнения работы j. В противном случае присутствует также зависимость от качества выполнения предшествующих работ.

Предположим, что можно выделить финальную работу n, качество которой и будет показывать и качество всей выполненной заявки. В противном случае, можно ввести фиктивную финальную работу n, позволяющую определить качество всей заявки (по формуле (3)).

Рассмотрим специфику функции (7) с учетом коллектива сотрудников, которые будут выполнять данную работу. Задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть известно множество исполнителей $w_1,\ldots,w_K$. Известны предпочтения каждого исполнителя относительно работы с остальными участниками. Необходимо оценить общий коэффициент комфорта работы всех исполнителей друг с другом.

В качестве одного из возможных вариантов можно предложить следующий. Пусть необходимо определить эффективность взаимодействия между исполнителями, входящими во множество $W=\{w_1,\ldots,w_K\}$. Предпочтения работы всех исполнителей друг с другом описаны матрицей k_{ij} (коэффициент работы i-го исполнителя с j-м). Тогда комфорт от работы всех исполнителей, входящих во множество W_j будет определяться формулой:

$$k_{W_j} = \frac{\sum\limits_{i:w_i \in W_j} \sum\limits_{l:w_l \in W_j} k_{il}}{2K} \tag{8}$$

Здесь K – количество исполнителей, входящих во множество W.

Зависимости (3), (5), (7) и (8) составят основу математического описания задачи. Исходными данными являются:

- количество исполнителей m;

- количество работ n, m>n;

-количество исполнителей n_1, n_2,…, n_n, закрепленных за каждой работой j, j=1,…,n;

- ориентировочная эффективность выполнения исполнителем i работы j – c_{ij};

- матрица k, каждый элемент k_{ij} показывает степень комфорта работы исполнителя i с исполнителем j (в общем случае $k_{ij} \neq k_{ji}$);

- матрица α, каждый элемент α_{ij} которой показывает степень влияния работы j на работу i;

- функции $f_j(W_j)$, показывающие вклады исполнителей, входящих во множество W_j в результат выполнения работы j.

Требуется назначить на каждую работу таких исполнителей, чтобы максимизировать общую эффективность выполнения всех работ. При этом требуется, чтобы качество всех операций было не ниже, чем заданное значение H. Формально задачу можно описать следующим образом:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} f_j\left(W_j\right) \cdot k_{W_j} \to \max \\ H_n \geq H \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i = 1,..., m \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = n_i, \forall j = 1,..., n \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases} \tag{9}$$

В силу того, что функция H_n является рекурсивной и целевая функция в общем случае нелинейна, систему (9) нельзя рассматривать как задачу линейного программирования. В связи с этим, разработаем алгоритм ее решения, учитывающей основные особенности задачи.

4. Обобщенный алгоритм решения задачи

С учетом рекурсивного вида функции H_r в качестве алгоритма решения задачи необходимо использовать алгоритм с возвратом. Такой выбор обусловлен, в частности, тем, что рассчитанное качество работ H_r при данном распределении может не соответствовать заявленному значению H. В этом случае необходимо отказаться от найденного решения и предложить другой способ назначения. Исходя из этого, общий алгоритм решения задачи имеет следующую структуру:

Этап 1. Предложить наилучшее решение и сформировать множества $W_{1,\ldots,}W_n$.

Этап 2. Рекурсивно оценить качество работ H_r при данном распределении.

Этап 3. Если H_r<H

То отменить найденное решение и перейти к этапу 1

Иначе вывести ответ

Рассмотрим основные этапы алгоритма более подробно. Основной интерес представляет собой алгоритм поиска наилучшего (с точки зрения эффективности результата) разбиения множества исполнителей на подмножества для выполнения для работ. В качестве основы будем использовать метод, аналогичный методу ветвей и границ в задаче о коммивояжере. Исходя из матрицы, которую можно получить на основании целевой функции, выберем наилучшие (с точки зрения эффективности) работы для каждого исполнителя и наилучшего исполнителя для каждой работы. Далее необходимо пройти по всем кандидатам на соответствие «исполнитель»-«работа» и определить штраф за отказ назначить данному исполнителю данную работу. Ячейка с максимальным штрафом будет являться назначением на данном этапе. С учетом полученных сведений, следующие кандидаты выбираются с учетом корректировки целевой функции функцией (8).

Выводы

Целью данной работы являлась формализация задачи назначения специалистов по работам и поиска алгоритма ее решения. В результате можно сделать следующие выводы.

1. Проанализирована специфика исследуемой задачи, а также подходы к решению классических частных задач о назначении. В результате был сделан вывод о необходимости разработки собственных методов ее решения.

2. Предложена формализация задачу. В результате можно сделать вывод о том, что полученная задача уже не является задачей линейного программирования.
3. Описан общий подход к ее решению.
4. Дальнейшая работа будет заключаться в детализации предложенного алгоритма. Основной интерес будет представлять подход к алгоритмизации первого этапа и решению задачи выбора множеств $W_{1,\ldots,} W_n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болнокина Е.В. Формализация задачи выбора механизмов стимулирования в задаче организационного управления многостадийной производственной системой/ Е.В. Болнокина, С.А. Олейникова // Системы управления и информационные технологии, №4(74), 2018. – С. 26-29.
2. Ватутин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г. Основы дискретной комбинаторной оптимизации. М.: Аргамак- Медиа, 2016. – 270 с.
3. Таха Х. А. Введение в исследование операций, 7 издание.: Пер. с англ. – М.: «Вильямс», 2005. – 912 с.
4. Cohen R., Katzir L., Raz D. An Efficient Approximation for the Generalized Assignment Problem // Information Processing Letters. Vol. 100 Issue 4. 2006. – pp.162-166.
5. D. B. Shmoys and Eva Tardos. An approximation algorithm for the generalized assignment problem. Mathematical Programming, 62(3) 1993. – pp. 461-474.

E.V. Bolnikina, S.A. Oleinikova

DETERMINATION OF OPLIMAL COMPOSITION OF EXECUTORS FOR MULTI-STAGE SEIVICE SYSTEM

Voronezh Technical State University

The object of the research in the work is multi-stage systems, at the entrance of which comes a stream of applications that require performing a series of series-parallel works for their service. The subject of the research is the optimization of the task of assigning contractors to work in such a system. The aim of the work is to formalize the task under study, taking into account the human factor while working together with a group of performers. The study of the features of the problem showed the impossibility of using classical approaches (in particular, the Hungarian method and methods for solving problems of integer programming) to solve it. In this regard, it became necessary to develop their own specialized mathematical and algorithmic apparatus. As a result, a formalization of the problem is proposed, including a nonlinear objective function and recursive constraints. The specificity of the mathematical apparatus required the use of appropriate algorithmic support for its solution. The method was *based on a return algorithm. The general idea of the algorithm based on the branch and bound method is presented. Thus, a formal description of the task of assignments to performers, taking into account the existing features of the system, and also presents a general algorithm for solving it. Detailing and software implementation of the algorithm will improve the efficiency of management decision-making by optimizing the choice of a team of performers for each of the works.*

Keywords: organizational management, assignment task, multistage service system, formalization, algorithm

REFERENCES

1. Bolnokina E.V. Formalizatsiya zadachi vybora mekhanizmov stimulirovaniya v zadache organizatsionnogo upravleniya mnogostadiynoy proizvodstvennoy sistemoy/ E.V. Bolnokina, S.A. Oleynikova // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii, No. 4(74), 2018. – pp. 26-29.
2. Vatutin E.I., Titov V.S., Emel'yanov S.G. Osnovy diskretnoy kombinatornoy optimizatsii. M.: Argamak- Media, 2016. – 270 p.
3. Takha Kh. A. Vvedenie v issledovanie operatsiy, 7 izdanie.: Per. s angl. – M.: «Vil'yams», 2005. – 912 p.
4. Cohen R., Katzir L., Raz D. An Efficient Approximation for the Generalized Assignment Problem // Information Processing Letters. Vol. 100 Issue 4. 2006. – pp.162-166.
5. D. B. Shmoys and Eva Tardos. An approximation algorithm for the generalized assignment problem. Mathematical Programming, 62(3) 1993. – pp. 461-474.