

УДК 004.94:004.9.032.26

doi: 10.26102/2310-6018/2019.24.1.005

В.Ю. Вишневецкий<sup>1</sup>, И.Б. Старченко<sup>2</sup>  
**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИИ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ  
ВЕЩЕСТВ В РЕКАХ: ОДНО- И ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧИ**

<sup>1</sup> Южный федеральный университет

<sup>2</sup> ООО «Параметрика»,

Таганрог, Россия

*Работа посвящена актуальной проблеме моделирования и таким образом впоследствии прогнозирования распространения загрязнений потоком воды в реках. Особенно актуальна данная задача в аспекте учета стока в основное русло притоков рек. Рассмотрены общие вопросы моделирования экологических систем, показана важность методологического подхода. Далее проблема декомпозирована на исследование речного русла, поскольку в реках присутствуют значительные скорости течения воды и распространение загрязняющих веществ может носить взрывной характер. В настоящей статье рассматривается диффузия загрязняющих веществ в реках в рамках одно- и двумерной задач. В качестве исходных используются уравнения переноса веществ вдоль траекторий – для одномерного случая и нестационарное уравнение конвекции-диффузии в дивергентном виде – для двумерного случая с соответствующими граничными условиями. Уравнения решены численно с использованием программного продукта Matlab. Построены профили распределения концентраций загрязняющих веществ для скоростей потока воды в реке в диапазоне 1-10 м. Показано, что для небольших скоростей наблюдается плавное повышение концентрации, далее с увеличением скорости возникает резкий скачок с наступлением насыщения, и затем для больших скоростей потока наблюдаются осцилляции, связанные с релаксационными процессами.*

**Ключевые слова:** дисперсия, концентрация, загрязняющие вещества, численное решение уравнений, одно- и двумерная задачи

### **Введение**

Водные экосистемы являются основным объектом исследований в гидроэкологии. Экосистему рассматривают как «локализованную в пространстве и динамичную во времени совокупность совместно обитающих и входящих в сообщества различных организмов, и условий их существования, находящихся в закономерной связи между собой и образующих систему взаимообусловленных биотических и абиотических процессов» [1]. В экологической системе присутствует три потока: вещества, энергии и информации, результат взаимодействия которых выражается в виде связей организмов между собой и окружающей средой. Для обеспечения и поддержания стабильного во времени функционирования в конкретных условиях необходимо динамическое взаимодействие потоков [2, 3].

При проведении экологических исследований широко используется системный подход, который позволяет выявить взаимосвязи внутри сложного объекта и оценить его целостность. Системный подход в данном случае, является методологической основой.

При моделировании экосистемы различными методами необходимо учитывать различные масштабы пространства и времени, в которых она существует.

На примере модели переноса загрязняющих веществ потоком воды в реке рассмотрим принципы построения иерархии моделей анализа и прогноза.

При долговременном прогнозировании на промежутки времени, значительно превышающие продолжительность установления равновесного состояния между загрязняющими веществами, растворенными в воде, водными взвесями (суспензиями) и донными осадками, при прогнозировании загрязнения слабо сорбирующимися на взвеси веществами применима упрощенная модель переноса. При этом часть явлений может быть проигнорирована. При отсутствии данных о коэффициенте диффузии в донных осадках из рассмотрения можно исключить процесс вертикальной диффузии. В этом случае решение задачи сведется к решению системы из двух, а не из трех уравнений, а сама задача станет полностью одномерной. Однако при прогнозировании последствий долговременных сбросов в одной точке наблюдения учет вертикальной диффузии важен, и пренебрежение им дает принципиально отличающиеся от действительности результаты. Таким образом, если коэффициент вертикальной диффузии известен, то этот процесс следует учитывать для тех веществ, для которых он актуален. Аналогично из рассмотрения можно исключить процесс накопления донных осадков при отсутствии данных о скорости накопления, а при получении этих данных – включить в рассмотрение, тем самым повысив точность прогноза. В качестве гидрологических характеристик потока воды в реке можно использовать коэффициент продольной турбулентной дисперсии. Источник загрязнений может иметь любую зависимость от времени [4].

При математическом моделировании движения жидкостей и газов типичными являются задачи конвекции-диффузии. Так как распространение примесей происходит не только за счет диффузии, но и обусловлено движением среды. Сложные модели, включающие в себя конвективный и диффузный перенос, используются при описании экологических проблем, связанных с описанием процессов распространения примесей в водоемах с моделированием процессов загрязнения грунтовых вод [5].

## Методы

В соответствии с принципами построения моделей водных экосистем для моделирования диффузии загрязняющих веществ использовались параболические уравнения второго порядка с несамосопряженными операторами, применяющиеся для решения задач конвекции-диффузии [5].

Одномерный вариант уравнения переноса веществ вдоль траекторий с постоянной скоростью  $U > 0$  имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где  $\varphi = f(x)$  – начальное распределение  $\varphi$  при  $t = 0$ . Скорость конвекции  $U$  можно рассматривать как фазовую скорость перемещения возмущения вдоль оси  $x$ , которое в начальный момент времени  $t = 0$  задается в виде:

$$\varphi(x, 0) = A_0 \exp(ikx), \quad (2)$$

где  $A_0$  – амплитуда в начальный момент времени,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны.

Для оценки пространственного и временного распределения концентраций загрязняющих веществ также было выполнено численное моделирование уравнений с использованием программы Matlab [6, 7].

## Результаты

Решение одномерного варианта уравнения переноса субстанций (1) вдоль траекторий с постоянной скоростью  $U > 0$  представлено на Рисунках 1-5.

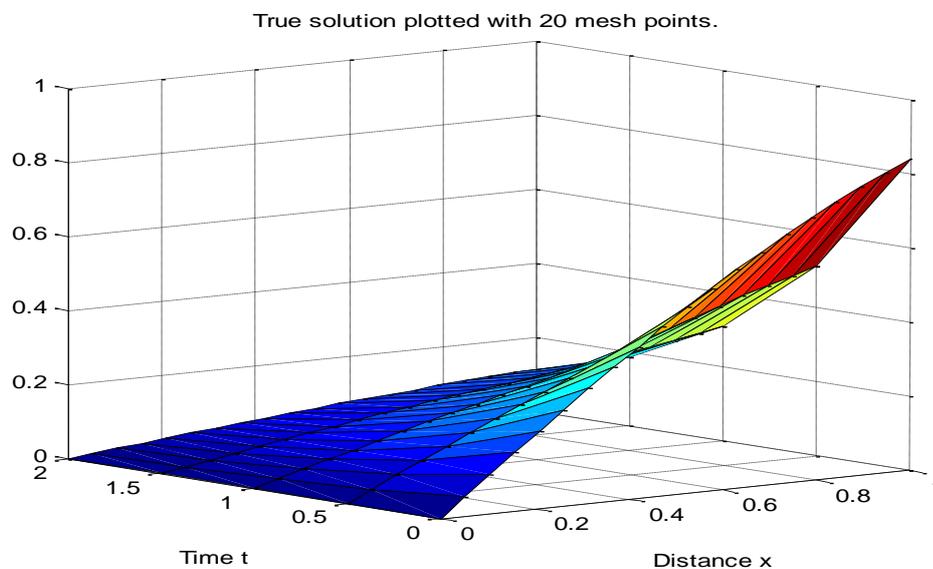


Рисунок 1 – Вид распределения концентрации загрязняющих веществ при скорости потока  $U=1$  м/с

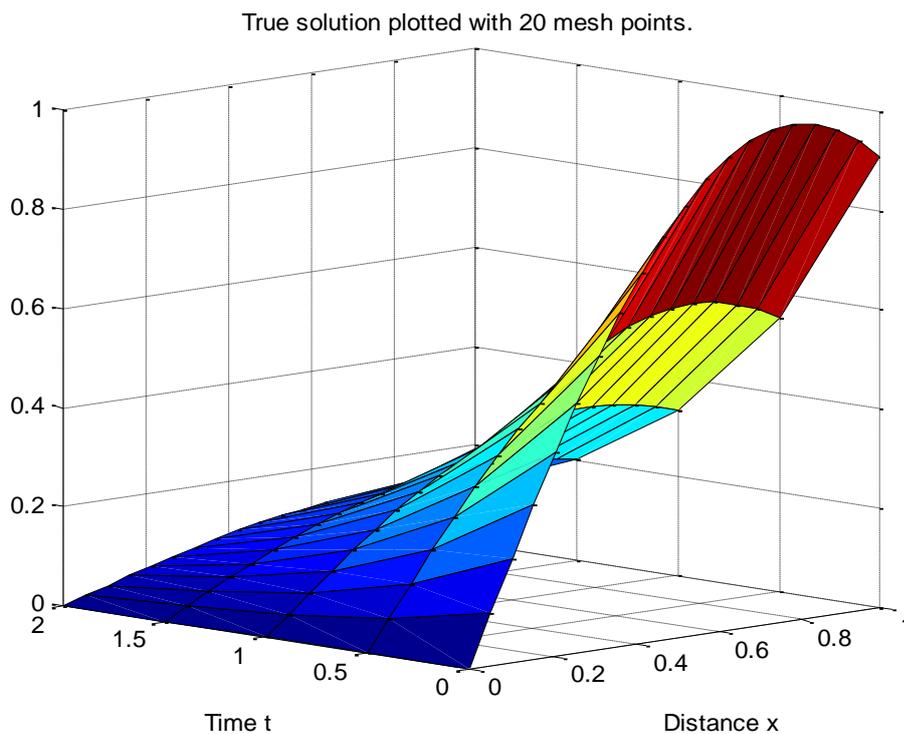


Рисунок 2 – Вид распределения концентрации загрязняющих веществ при скорости потока  $U=2$  м/с

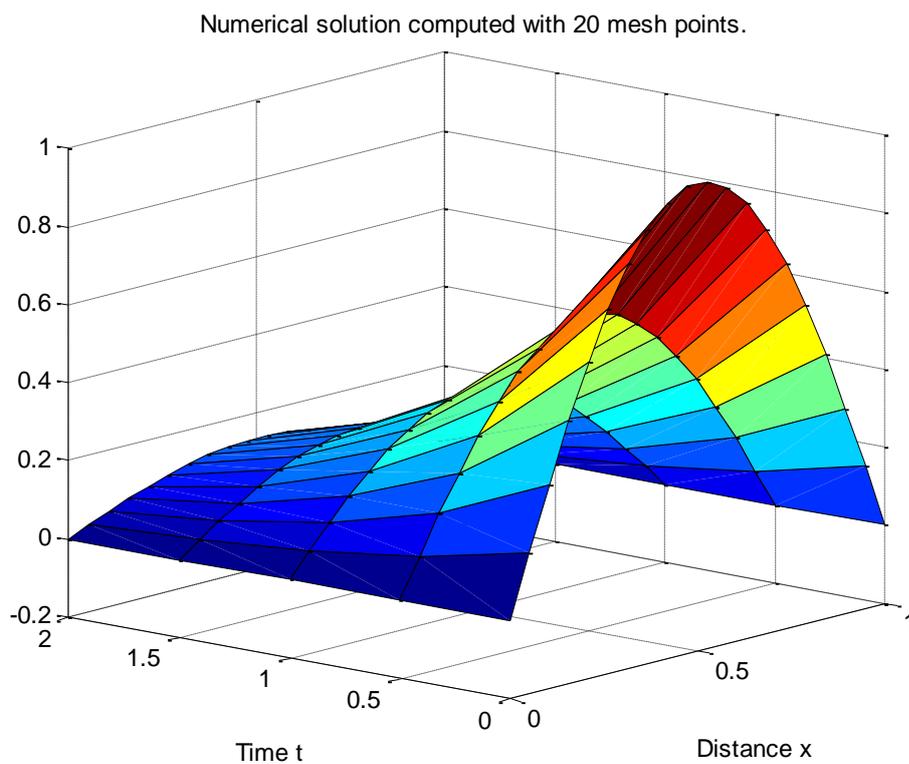


Рисунок 3 – Вид распределения концентрации загрязняющих веществ при скорости потока  $U=3$  м/с

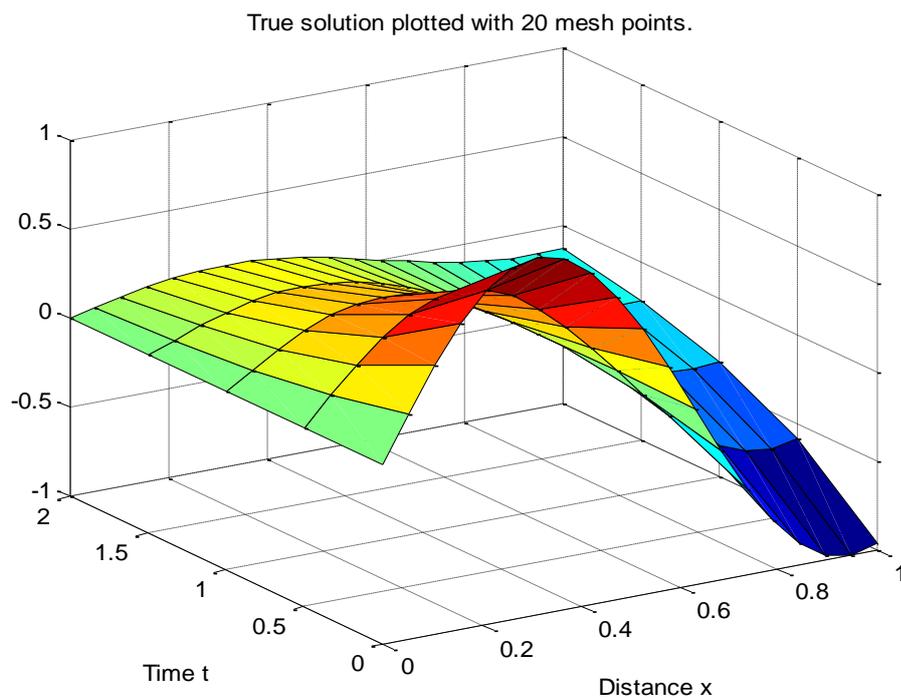


Рисунок 4 – Вид распределения концентрации загрязняющих веществ при скорости потока  $U=5$  м/с

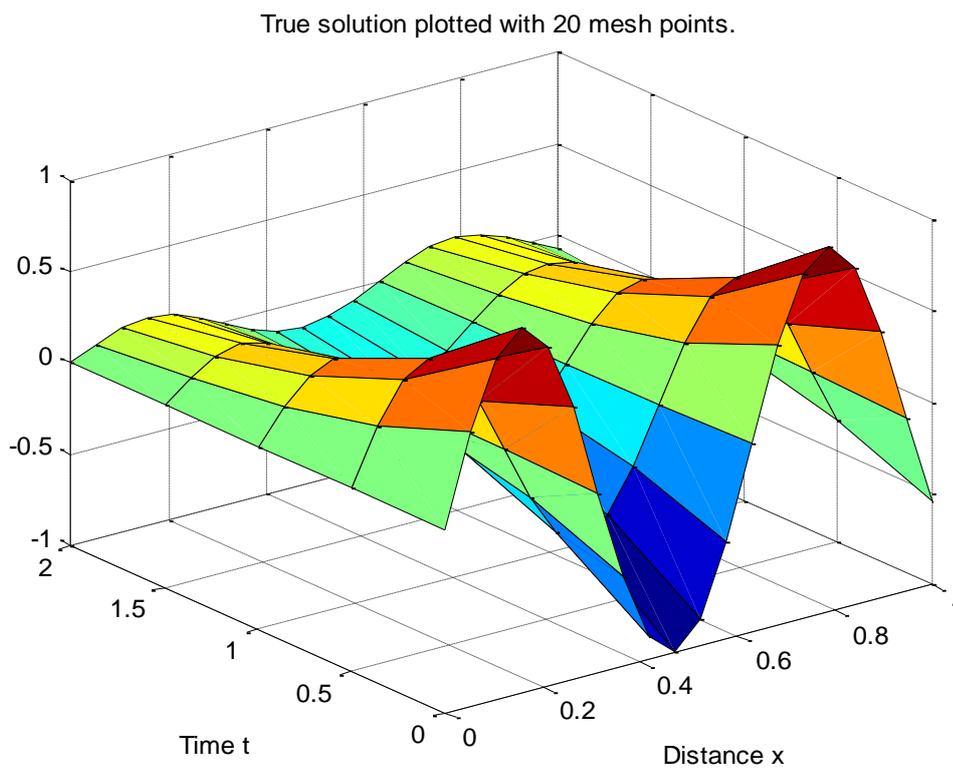


Рисунок 5 – Вид распределения концентрации загрязняющих веществ при скорости потока  $U=10$  м/с

Скорости течения варьировались от значений  $U=1$  м/с до  $U=10$  м/с. По вертикальной оси представлена нормированная концентрация веществ. Здесь  $t$  – время,  $x$  – координата направления распространения концентрации.

Анализируя распределение концентраций загрязняющих веществ на Рисунках 1-5, можно сказать следующее. Данное численное моделирование представляет собой простейший случай одномерного распространения загрязняющих веществ вдоль координаты  $x$ .

Для небольших скоростей распространения (Рисунки 1, 2) в пределах 1-2 м/с наблюдается плавный рост концентрации загрязнения.

С увеличением скорости течения (Рисунок 3) до 3 м/с концентрация сначала возрастает до определенного значения, затем начинает уменьшаться. Это объясняется высокой скоростью потока жидкости, которая способствует скорейшему перемешиванию и диффузии веществ в водной среде.

Следующий вариант уравнения конвекции-диффузии, которое было численно проанализировано – уравнение (3), учитывающее граничные условия. С учетом граничных условий на границе раздела двух сред (разные концентрации веществ, различная плотность, температура потоков и др.) были рассчитаны объемные графики для двух случаев:  $U=1$  м/с и  $U=10$  м/с, показанные на Рисунках 6, 7.

На верхнем графике (Рисунки 6 и 7) показано трехмерное отображение, на нижнем – профиль решения в выбранные моменты времени.

### **Обсуждение**

Для больших скоростей (Рисунки 4, 5) в пределах 5-10 м/с наблюдаются осцилляции в распределении концентраций вдоль координаты распространения. Видно, что период осцилляций пропорционален скорости потока. Осцилляции концентрации загрязняющих веществ можно объяснить очень высокими скоростями течения потока воды и возникающими при этом релаксационными процессами. Т.е. концентрация быстро нарастает до максимального значения, затем спадает, но при этом загрязняющие вещества успевают переместиться в очередную точку потока, опережая скорость спада концентрации.

На Рисунках 6, 7 видно, что учет границ раздела вносит определенные искажения в профиль распределения концентрации загрязняющих веществ вдоль направления распространения потока жидкости. Причем осцилляции концентрации наблюдаются как для малых скоростей (Рисунок 7), так и для больших (Рисунок 6).

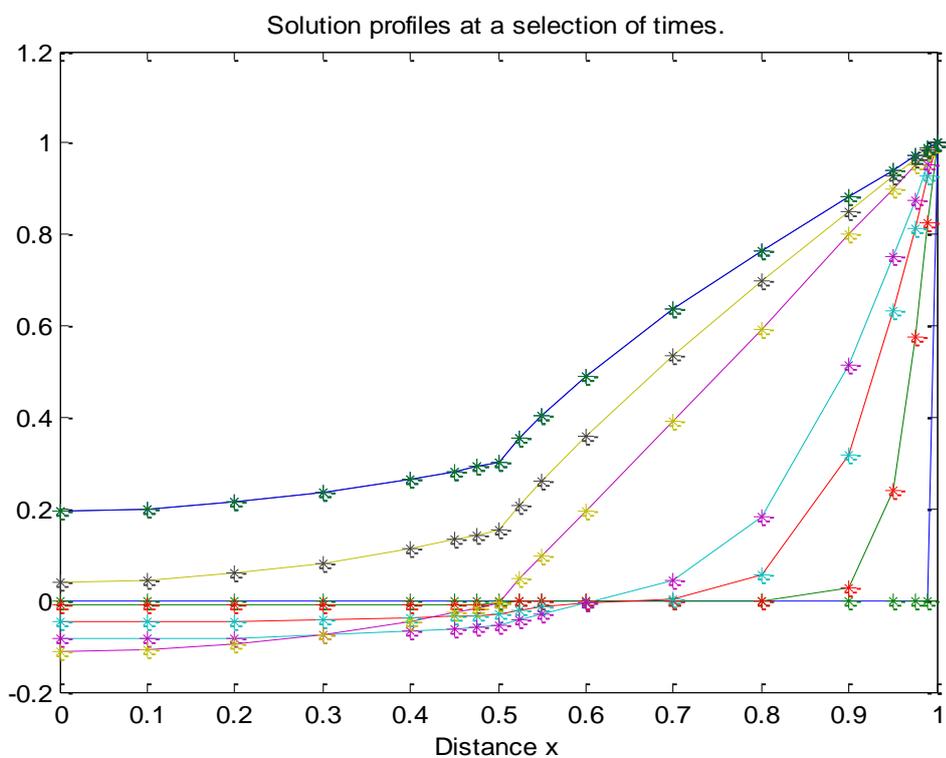
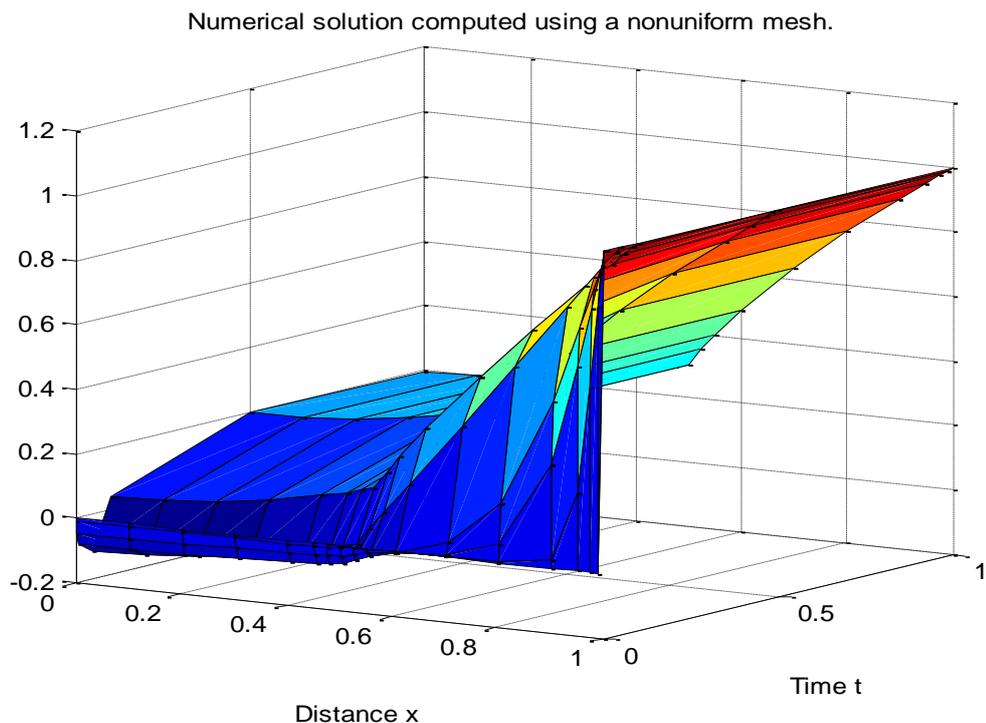


Рисунок 6 -Распределение концентрации загрязняющих веществ с учетом граничных условий при  $U=10$  м/с

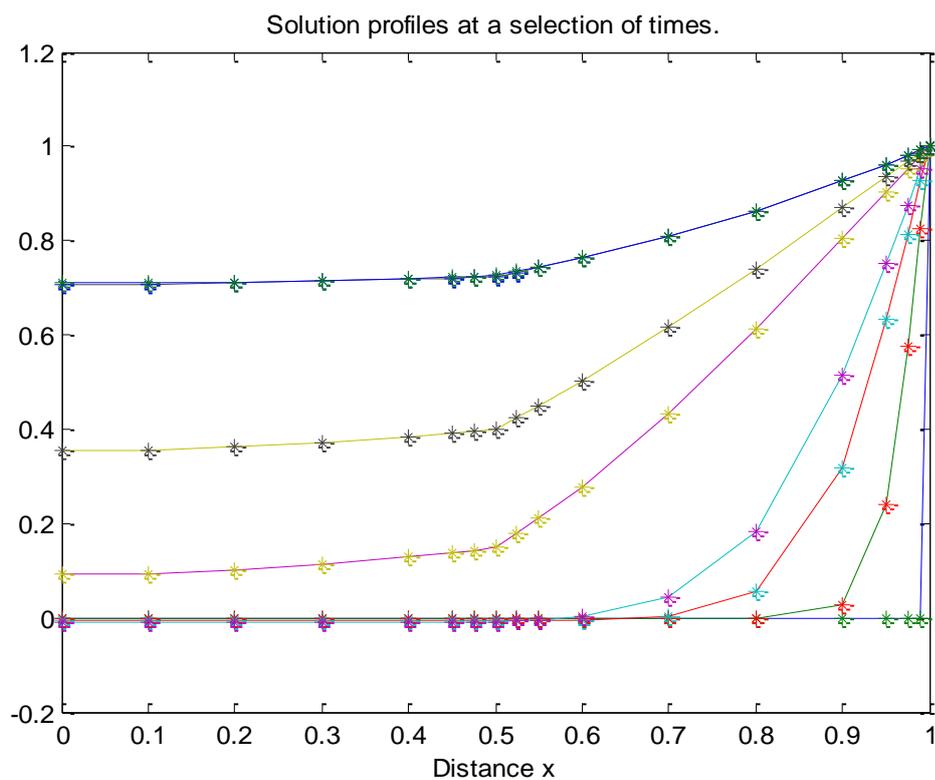
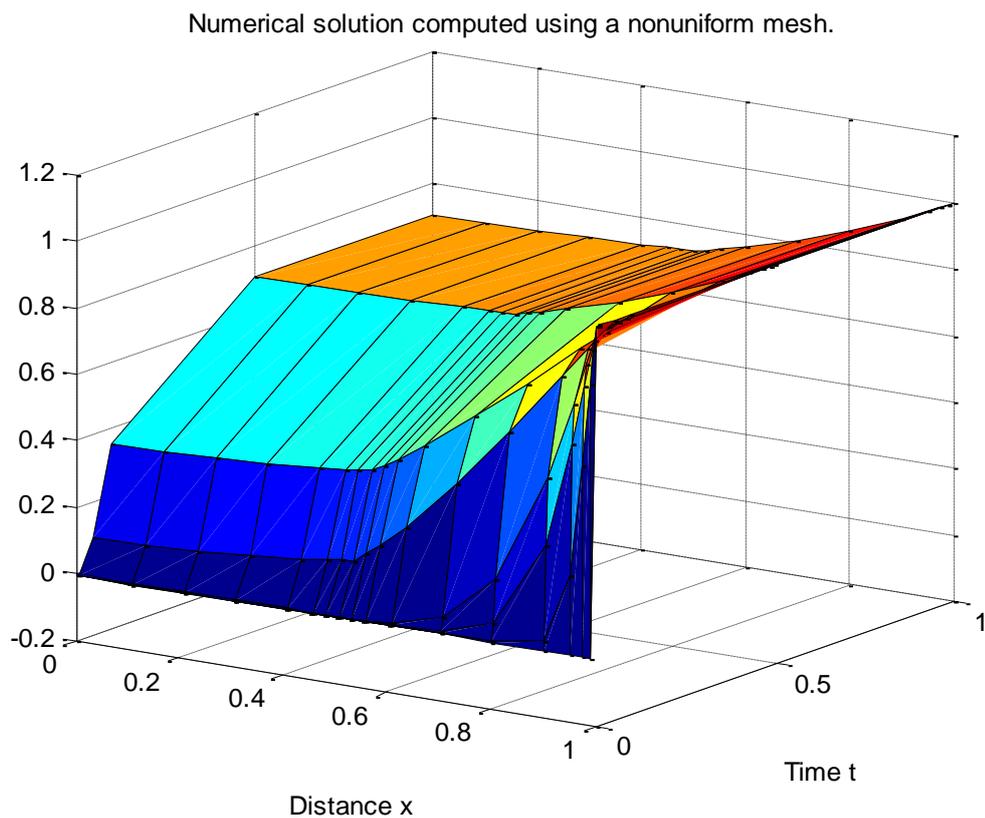


Рисунок 7 – Распределение концентрации загрязняющих веществ с учетом граничных условий при  $U=1$  м/с

Решены одно- и двумерная задачи распределения концентраций загрязняющих веществ в реках для различных скоростей потока воды в реке и скоростей диффузии поллютантов.

Подобная модель хорошо будет описывать дисперсию загрязняющих веществ в многофазных средах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алимов А.Ф. Элементы теории функционирования водных экосистем. СПб.: Наука, 2001. – 147 с.
2. Быков А.А. Моделирование природоохранной деятельности: учебное пособие. М.: Изд-во НУМЦ Госкомэкологии России, 1998. – 182 с.
3. Куракина Н.И., Емельянова В.Н., Коробейников С.А., Никанорова Е.С. Пространственное моделирование загрязнения водных объектов. // [http://www.dataplus.ru/Arcrev/Number\\_36/12\\_cvall.html](http://www.dataplus.ru/Arcrev/Number_36/12_cvall.html).
4. Вишневецкий В.Ю. Метод и система интегральной оценки показателей качества стока горных рек : дис. ... канд. техн. наук. – Таганрог, 2006. – С. 49-50.
5. Самарский, А.А., Численные методы решения задач конвекции – диффузии / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич – М.: Эдиториал УРСС. – 1999. – 248 с.
6. Курбатова, Е.А. MATLAB 7. Самоучитель [Текст] / Е.А. Курбатова – Вильямс, 2005. – 256 с.
7. Поршневу, С.В. MATLAB 7. Основы работы и программирования. Учебник. [Текст] / С.В. Поршневу. Изд-во Бином. Лаборатория знаний, – 2006. – 320 с.

V.Y. Vishnevetskiy<sup>1</sup>, I.B. Starchenko<sup>2</sup>

### NUMERICAL MODELING OF DIFFUSION OF CONTAMINANTS IN RIVERS: ONE - AND TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS

<sup>1</sup> Sothern Federal University

<sup>2</sup> LLC “Parametrika”,  
Taganrog, Russia

*The work is devoted to the actual problem of modeling and thus subsequently predicting the spread of pollution by water flow in rivers. This task is particularly relevant in the aspect of flow accounting in the main channel of river tributaries. The general problems of modeling of ecological systems were considered; the importance of methodological approach was shown. Further, the problem was decomposed into the study of the river bed, as in the rivers there are significant water flow rates and the spread of pollutants can be explosive. This article*

*deals with the diffusion of pollutants in rivers in the framework of one - and two-dimensional problems. The equations of transport of substances along the trajectories for the one – dimensional case and the non-stationary convection-diffusion equation in the divergent form for the two-dimensional case with the corresponding boundary conditions were used as initial ones. The equations were solved numerically using Matlab software. Profiles of distribution of concentrations of pollutants for water flow rates in the river in the range of 1-10 m were plotted. It was shown that for small velocities there is a smooth increase in concentration, then with an increase in the velocity there is a sharp jump with further saturation, and then for large flow velocities there are oscillations associated with relaxation processes.*

**Keywords:** dispersion, concentration, pollutants, numerical solution of equations, one-and two-dimensional problems

## REFERENCES

1. The elements of the theory of functioning of aquatic ecosystems. SPb.: Science, 2001. - 147 p.
2. Environmental Modeling: a training manual. M.: Publishing house NUMC of Goscomecology of Russia, 1998. - 182 p.
3. Kurakina N.I., Emelyanova V.N., Korobeynikov S.A., Nikanorova E.S. Spatial modeling of water objects pollution. // [http://www.dataplus.ru/Arcrev/Number\\_36/12\\_cvall.html](http://www.dataplus.ru/Arcrev/Number_36/12_cvall.html).
4. Vishnevetskiy V.Y. Method of and system for integrated evaluation of indicators of the quality of rivers discharge: Dis. Kand. Eng. Sciences - Taganrog, 2006. - P. 49-50.
5. Samarsky, A.A. Numerical methods for solving the problems of convection – diffusion [Text] / A.A. Samarsky, P.N. Vabischevich - M.: URSS. - 1999. - 248 p.
6. Kurbatov, E.A. MATLAB 7. Tutorial [Text] / E.A. Kurbatova – Williams, 2005. - 256 p.
7. Porshnev, S.V. MATLAB 7. Basics of operation and programming. Textbook. [Text] / S.V. Porshnev. Publishing house Bean. Laboratory of knowledge, - 2006. - 320 p.