

УДК 004.94: 004.9.032.26

doi: 10.26102/2310-6018/2019.24.1.016

В.Ю. Вишневецкий<sup>1</sup>, И.Б. Старченко<sup>2</sup>

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИИ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В РЕКАХ С УЧЕТОМ ДИФФУЗНОГО МНОЖИТЕЛЯ

<sup>1</sup>Южный федеральный университет

<sup>2</sup>ООО «Параметрика»

*В данной работе рассматриваются проблемы моделирования и прогнозирования распространения загрязняющих веществ в потоке воды в реке. Проанализированы государственные доклады Министерства природных ресурсов и экологии, на основании которых показана важность отслеживания сбросов загрязняющих веществ в реки, которые являются разносчиками поллютантов со скоростью потока воды. Особое значение приобретает важность прогнозирования распространения концентрации загрязняющих веществ в русле реки и дальнейшего сброса вод в водоемы. В настоящей статье рассматривается двумерное моделирование процесса диффузии загрязняющих веществ в реках с учетом диффузного множителя. В качестве основного используется симметричное параболическое уравнение второго порядка. Выполнено численное моделирование уравнений для различных скоростей потока воды в реке и скоростей диффузного процесса в программном продукте Matlab. Построены трехмерные профили распределения концентраций в зависимости от скорости течения реки в диапазоне 0,1-1 м/с и скорости диффузии поллютанта в диапазоне 0,5-10 м/с. Показано, что при малых скоростях диффузии концентрация практически постоянна, а высокая скорость диффузии дает резкое возрастание концентрации в начальный момент времени с последующим плавным спадом.*

**Ключевые слова:** сток рек, концентрация, загрязняющие вещества, численное решение уравнений, диффузный множитель, мониторинг водных ресурсов, уравнения конвекции-диффузии

### Введение

Загрязнение водных ресурсов является в настоящее время одной из главных проблем человечества. В связи с этим обеспечение населения питьевой водой, отвечающей нормативным требованиям, выходит на первостепенный план.

Особую важность в контроле сбросов загрязняющих веществ и их переносе по территории водных бассейнов играют малые реки, притоки основных водных артерий. Без учета количества стока рек, особенно малых, невозможно составить достоверную картину характера биологического и химического загрязнения поверхностных вод. Отсутствие постоянных пунктов контроля, изменчивость русла рек, особенно после весенних паводков, приводит к тому, что вне зоны наблюдения оказываются практически все притоки крупных рек, хотя именно с их стоком в реку поступает основная часть загрязняющих веществ [1].

Для наиболее полного учёта всех факторов отрицательного воздействия на речные экосистемы и принятия конкретных мер по предотвращению загрязнения рек необходимо создать единую систему мониторинга водных ресурсов с учетом всех природных и антропогенных факторов, влияющих на их состояние, частью которой может стать модуль прогнозирования диффузии загрязняющих веществ в потоке реки.

### Методы

В качестве основного уравнения для решения задачи конвекции-диффузии используется уравнение вида [2, с. 12] относительно  $\varphi$  – потенциала колебательной скорости частиц

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v}\varphi) - \nabla(k\nabla\varphi) = f \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости потока,  $k$  – волновое число,  $f$  – функция внешних источников. Вид уравнения (1) отражает закон сохранения вещества.

Изменив порядок операции дивергенции, т.е. применив ее к вектору скорости потока  $\mathbf{v}$ , а не к скалярному произведению скорости потока  $\mathbf{v}$  на потенциальную функцию  $\varphi$ , получим уравнение (1) в недивергентном виде [2]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\varphi - \nabla(k\nabla\varphi) = f \quad (2)$$

Полученное параболическое уравнение второго порядка является основным для решения краевых задач. Чтобы учесть конвективный перенос, запишем второе слагаемое в виде полусуммы вторых слагаемых уравнений (1) и (2) [2], то есть в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla(\mathbf{v}\varphi) + (\mathbf{v}\nabla)\varphi) - \nabla(k\nabla\varphi) = f \quad (3)$$

Введем понятие коэффициента диффузии как функции координаты (в неоднородных средах), коэффициент конвективного переноса (скорости) – как функцию координаты и времени, т.е.  $k = k(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ,  $f = f(\mathbf{x}, t)$ . Дискретизируя уравнение (3), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ v_{\alpha}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (v_{\alpha}(\mathbf{x}, t) \varphi) \right] - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}} \right) = f(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

Из которого определим оператор диффузионного переноса  $D$  как

$$D\varphi = -\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}} \right).$$

(5)

Для оценки пространственного и временного распределения концентраций загрязняющих веществ также было выполнено численное моделирование уравнений с использованием программы Matlab [3, 4].

### Результаты

Был численно проанализирован самый сложный вариант уравнения конвекции-диффузии – уравнение (4) с учетом конвективного члена  $D$  (5).

Это уравнение представляет собой параболическое уравнение второго порядка в частных производных. Для решения использовались граничные условия Дирихле первого рода, определяющие поведение рассматриваемой системы (потока жидкости) на границе области, т.е. у источника. Уравнение (4) решалось численно вычислительными средствами системы математических вычислений Matlab. Использовалась неоднородная сетка метода наименьших квадратов для повышения точности вычислений, т.е. в местах резкого изменения параметров шаг сетки становился чаще и, наоборот, в местах плавных изменений шаг сетки делался больше. Это позволило оптимизировать вычислительные ресурсы.

При анализе уравнения (4) численными методами варьировались два параметра: скорость распространения потока воды  $U$  и скорость диффузии загрязняющих веществ  $c$ , которая в предыдущих случаях считалась равной скорости потока воды.

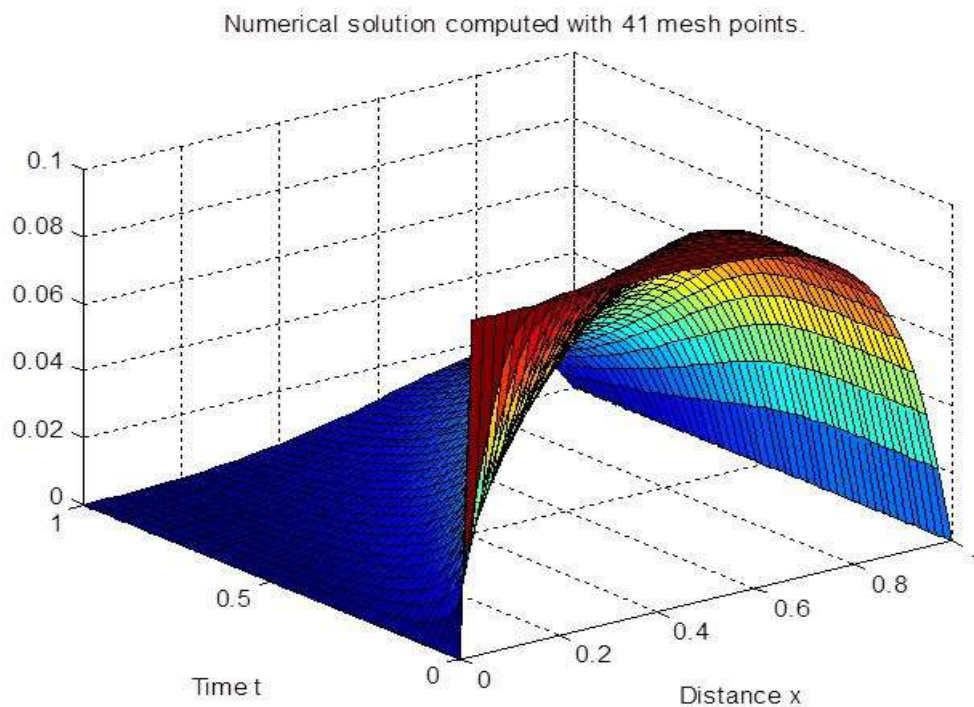


Рисунок 1 – Распределение концентрации загрязняющих веществ с учетом конвективного члена  $D$  при  $U=0,1$  м/с;  $c=1$  м/с

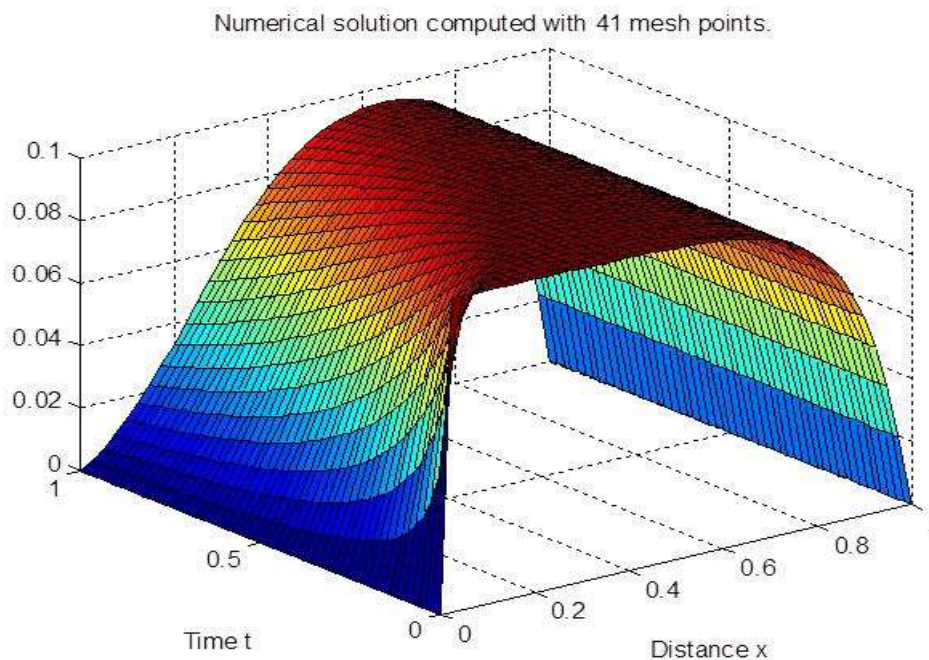


Рисунок 2 – Распределение концентрации загрязняющих веществ с учетом конвективного члена  $D$  при  $U=0,1$  м/с;  $c=5$  м/с

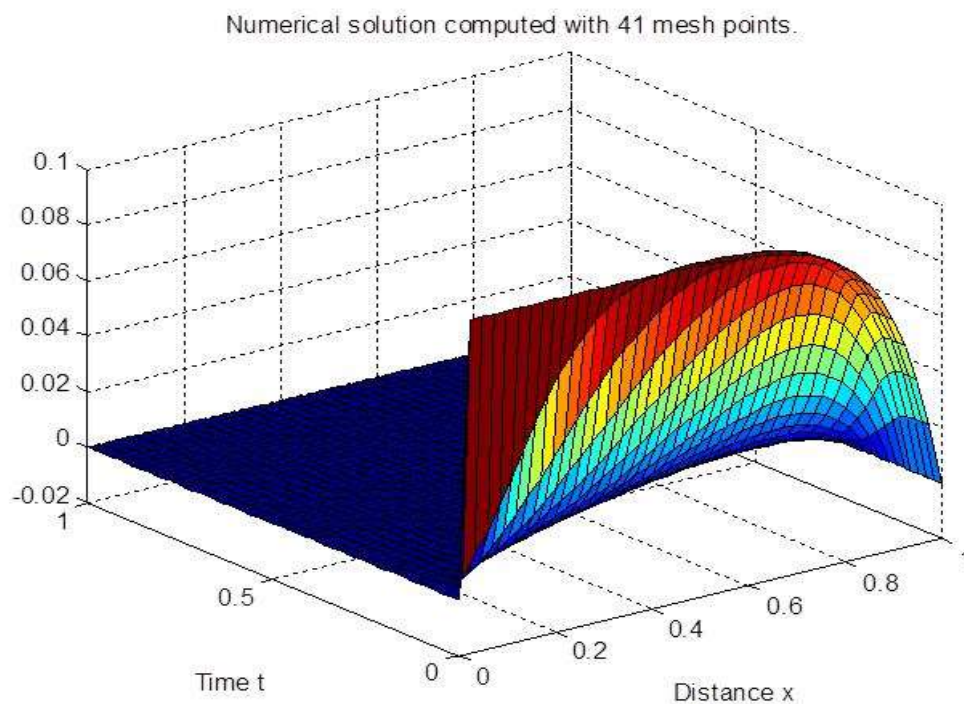


Рисунок 3 – Распределение концентрации загрязняющих веществ с учетом конвективного члена  $D$  при  $U=1$  м/с;  $c=0,5$  м/с

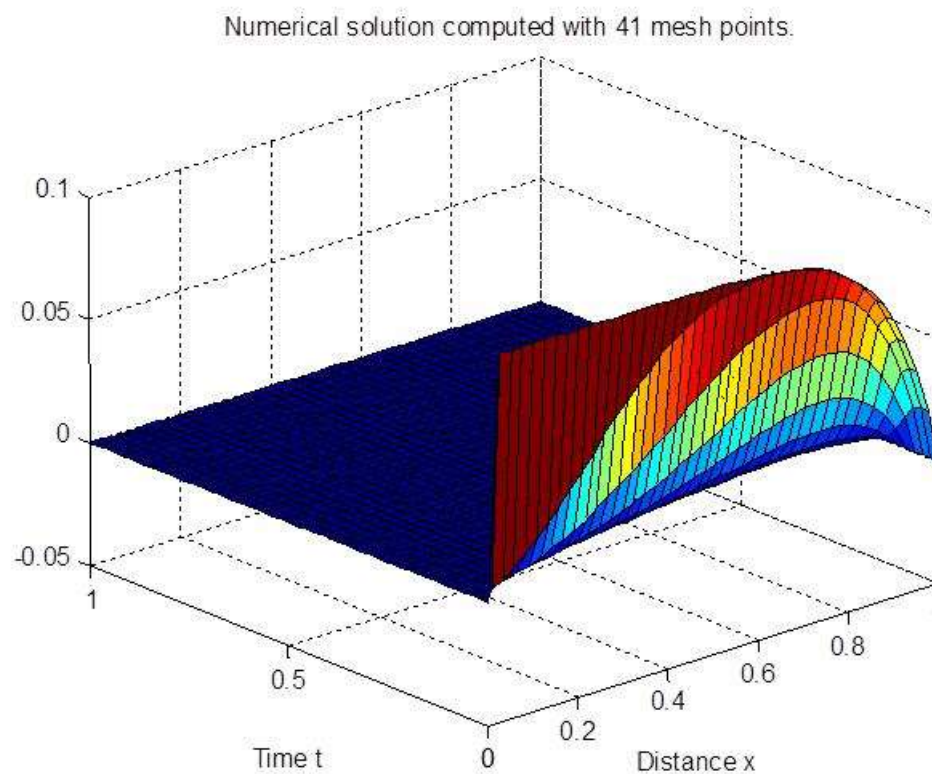


Рисунок 4 – Распределение концентрации загрязняющих веществ с учетом конвективного члена  $D$  при  $U=1$  м/с;  $c=1$  м/с



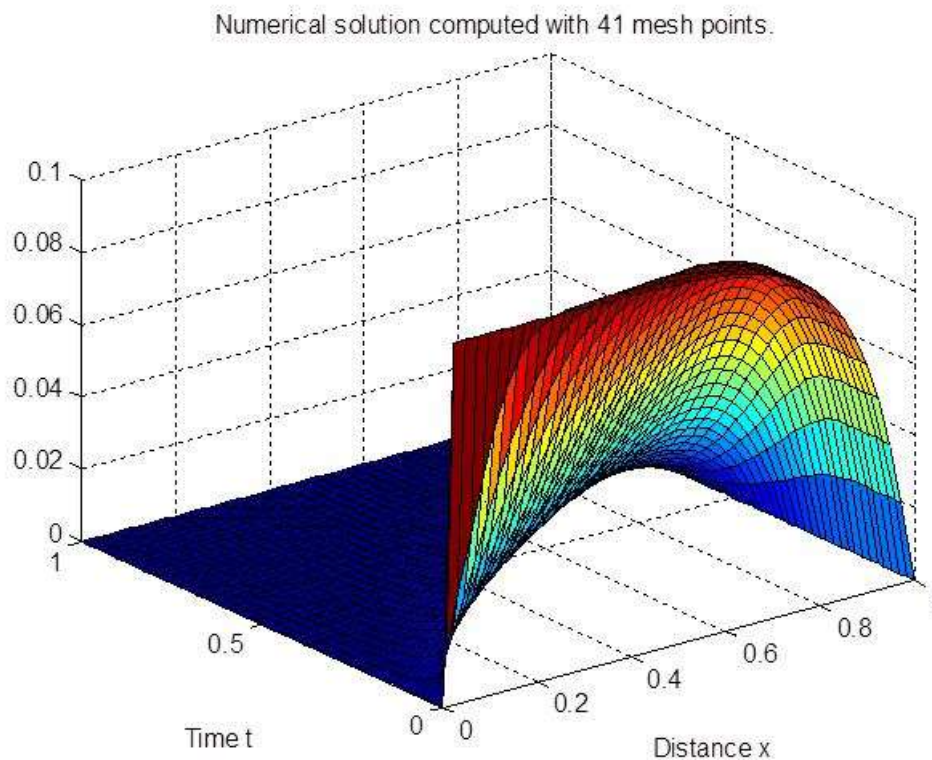


Рисунок 5 - Распределение концентрации загрязняющих веществ с учетом конвективного члена  $D$  при  $U=1$  м/с;  $c=5$  м/с

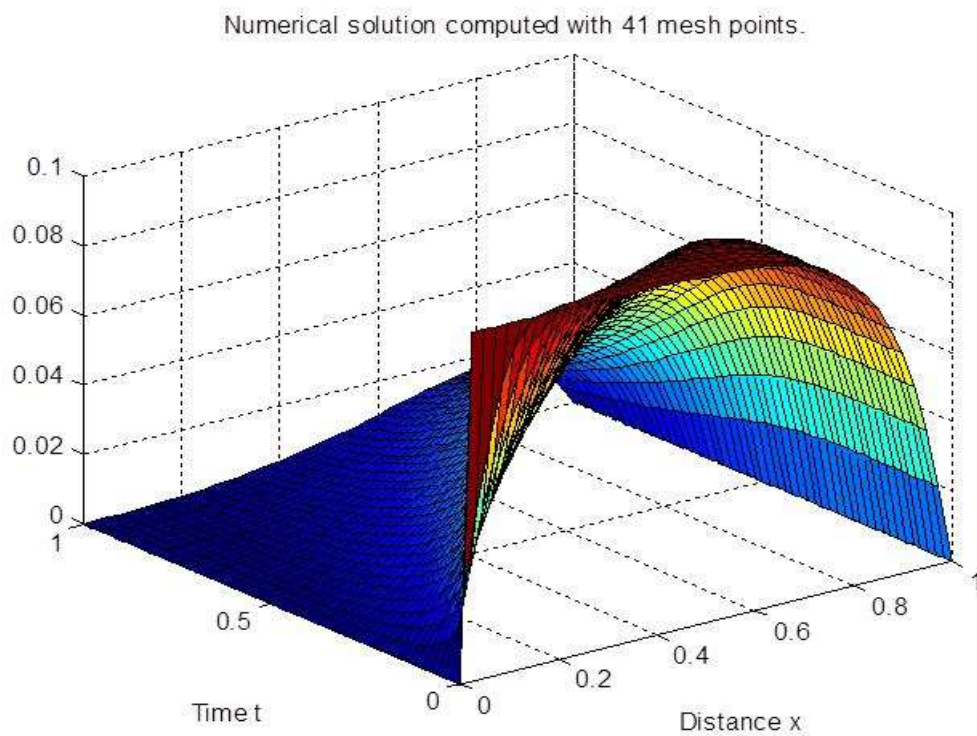


Рисунок 6 - Распределение концентрации загрязняющих веществ с учетом конвективного члена  $D$  при  $U=1$  м/с;  $c=10$  м/с

Результаты численного анализа уравнения конвекции-диффузии (6) представлены на Рисунках 1 –6. Уравнение было проанализировано для малых (0,1 м/с) и средних (1 м/с) скоростей потока воды. Скорость диффузии изменялась при этом в диапазоне от 1 до 10 м/с.

### **Обсуждение**

В случае, если скорость диффузии превышает (Рисунок 1) и сильно превышает (Рисунок 2) скорость потока жидкости, наблюдается первоначальное повышение концентрации до максимального уровня, некоторый участок с постоянной концентрацией, затем ее плавный спад.

На Рисунках 3 – 6 показаны изменения профиля концентрации загрязняющих веществ при постоянной средней скорости потока воды  $v=1$  м/с для диапазона скоростей диффузии  $c=0,5 - 10$  м/с.

При малых скоростях диффузии (Рисунки 3, 4), практически равных скорости тока жидкости в начальный момент времени и спустя некоторый промежуток концентрация практически не изменяется, что обусловлено синхронность процессов течения воды и скорости диффузии.

При увеличении скорости диффузии (Рисунок 5) профиль приобретает выпуклую форму, которая становится явной при значительном превышении скорости диффузии над скоростью тока воды (Рисунок 6). Высокая скорость диффузии обуславливает резкое возрастание концентрации в начальный момент времени.

Численно проанализированная модель позволила учесть влияние скорости диффузии  $c$  загрязняющих веществ. В ранее рассмотренных моделях [5] делалось допущение, что она равна скорости потока воды в реке, что не всегда справедливо. На скорость диффузии могут оказывать влияние не только механическое перемещение жидкости, но температурные градиенты, биологические факторы и пр.

### **Заключение**

В данной статье было рассмотрено численное моделирование процесса распространения загрязняющих веществ в реках с точки зрения теории конвекции-диффузии. Выполнено 3D моделирование уравнений конвекции-диффузии с учетом конвективного члена. Такой подход позволил варьировать тремя переменными процесса диффузии поллютантов в реках и повысить точность прогноза.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Крохмаль А.Г., Вишневецкий Ю.М. Состояние и использование водных ресурсов в Карачаево-Черкесской Республике.// Материалы 1-ой Республиканской научно-практической конференции 28 апреля 2000 года «Медико-социальные проблемы дефицита йода в биосфере и организме человека».// Минздрав РФ, Минздрав КЧР, Ставропольская государственная медицинская академия, Черкесский медицинский колледж. Черкесск. – 2000. – с.18-25.
2. Самарский, А.А., Численные методы решения задач конвекции – диффузии [Текст] / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич – М.: Эдиториал УРСС. – 1999. – 248 с.
3. Курбатова, Е.А. MATLAB 7. Самоучитель [Текст] / Е.А. Курбатова – Вильямс, 2005. – 256 с.
4. Поршнева, С.В. MATLAB 7. Основы работы и программирования. Учебник. [Текст] / С.В. Поршнева. Изд-во Бином. Лаборатория знаний, – 2006. – 320 с.
5. Вишневецкий В.Ю., Старченко И.Б. Численное моделирование диффузии загрязняющих веществ в реках: одно- и двумерная задачи // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. Научный журнал, 2019. Т. 7, № 1. [https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2019/01/VishnevetskiyStarchenko\\_1\\_19\\_1.pdf](https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2019/01/VishnevetskiyStarchenko_1_19_1.pdf). Дата обращения 26.02.2019. doi: 10.26102/2310-6018/2019.24.1.005

V.Y. Vishnevetskiy <sup>1</sup>, I.B. Starchenko <sup>2</sup>

### NUMERICAL MODELING OF DIFFUSION OF CONTAMINANTS IN RIVERS WITH REGARD OF DIFFUSE TERM

<sup>1</sup> Sothern Federal University

<sup>2</sup> LLC “Parametrika”

*This paper deals with the problems of modeling and forecasting the spread of pollutants in the water flow in the river. The state reports of the Ministry of natural resources and ecology are analyzed, on the basis of which the importance of tracking the discharge of pollutants into the rivers, which are carriers of pollutants from the water flow rate, was shown. Of particular importance is the importance of predicting the spread of the concentration of pollutants in the river bed and the further discharge of water into water bodies. In this article we consider two-dimensional modeling of the process of diffusion of pollutants in rivers, taking into account the diffuse factor. The symmetric parabolic equation of the second order was used as the basic one. Numerical modeling of the equations for different flow rates of water in the river and the velocity of the diffusion process was done in Matlab software. Three-dimensional profiles of*



*concentration distribution depending on the river flow rate in the range of 0.1-1 m/s and the pollutant diffusion rate in the range of 0.5-10 m/s are plotted. It is shown that at low diffusion rates the concentration is almost constant, and the high diffusion rate gives a sharp increase in the concentration at the initial time, followed by a smooth decline.*

**Keywords:** river flow, concentration, pollutants, numerical solution of equations, diffuse term, water resources monitoring, convection-diffusion equation

## REFERENCES

1. State and use of water resources in the Republic of Karachay-Cherkessia. // Materials of the 1st Republican scientific and practical conference on April 28, 2000 "Medical and social problems of iodine deficiency in the biosphere and the human body"// Ministry of health, Ministry of health, Stavropol state medical Academy, Circassian medical College. Cherkessk, 2000. - p. 18-25.
2. Samarskiy, A.A., Numerical methods for solving convection – diffusion [Text] / A.A. Samarskiy, P.N. Vabischevitch – M.: URSS. - 1999. - 248 p.
3. Kurbatov, E.A. MATLAB 7. Tutorial [Text] / E.A. Kurbatova – Williams, 2005. - 256 p.
4. Porshnev, S.V. MATLAB 7. Basics of operation and programming. Textbook. [Text] / S.V. Porshnev. Publishing house Bean. Laboratory of knowledge, - 2006. - 320 p.
5. Vishnevetskiy V.Yu., Starchenko I.B. Numerical modeling of diffusion of contaminants in rivers: one – and two-dimensional problems // Modeling, Optimization and Information Technology. Scientific Journal, 2019. V. 7, № 1. [https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2019/01/Vishnevetskiy-Starchenko\\_1\\_19\\_1.pdf](https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2019/01/Vishnevetskiy-Starchenko_1_19_1.pdf). Retrieved: 26.02.2019. doi: 10.26102/2310-6018/2019.24.1.005