УДК 517.927 DOI: 10.26102/2310-6018/2019.26.3.040

О.Р. Балабан

АППРОКСИМАЦИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА СЕТИ И МЕТОД МОМЕНТОВ

ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» ,Воронеж

В работе рассматриваются эволюционные задачи, лежащие в основе математического описания колебательных и гидродинамических процессов в сетеподобных объектах (волноводах, гидросетях и пр.). Основное внимание уделяется анализу свойств эллиптического оператора (одномерного оператора Лапласа) с распределенными параметрами на сети, устанавливающих спектральную полноту системы собственных функций в классе функций, интегрируемых с квадратом. Получены условия, гарантирующие устойчивость по Нейману (спектральную устойчивость) разностных схем для эволюционных задач, представлено решение задачи управления методом моментов. Методы исследования эволюционных задач базирутся на свойствах положительно определенного эллиптического оператора: система собственнх функций образует базис в пространстве функций суммируемых с квадратом; ряды по системе собственных функций допускают априорные оценки решений эволюционной задачи; аппроксимация эллиптического оператора редуцирует его к конечномерному оператору в конечномерном пространстве сеточных функций с естественной евклидовой нормой, который (конечномерный оператор) приближает исходный с любой наперед заданной точностью в смысле нормы пространства функций суммируемых с квадратом. Для эволюционных задач используется явная схема первого порядка аппроксимации на сетке графа (параболическая система) и явная схема второго порядка аппроксимации (гиперболическая система). Устанавливаются осцилляционные свойства полученных операторов, аналогичные классическим осцилляционным свойствам. Для разностных схем параболической и гиперболической систем уравнений получены условия, гарантирующие счетную спектральную устойчивость (устойчивость в смысле Неймана), а следовательно, возможность получения аналогов теоремы А.Ф. Филиппова о сходимости разностных схем в терминах шагов аппроксимации сетки графа. Для иллюстрации применимости используемого подхода рассмотрена задача управления – перевод эволюционных систем параболического и гиперболического типов из заданных начальных в заданные финальные состояния; получены условия, гарантирущие управляемость исследуемых систем.

Ключевые слова: оператор Лапласа на графе, эволюционные задачи, аппроксимация, устойчивость, сходимость, метод моментов.

Введение

В существующих исследованиях в направлении аппроксимации эволюционных дифференциальных систем носителем функций являются классические связные области с кусочно-гладкой границей. Исследованию таких задач посвящено множество работ (см, например, работу Г.И. Марчук [1]). Ситуация, когда носитель функций представляет собой конечное объединение классических областей, попарно пересекающихся только по заданным многообразиям (т.е. структура носителя аналогична структуре сетеподобных областей [2]), является новой для исследователей, здесь имеются только фрагментарные результаты – работы В.В. Провоторова, Е.С. Барановского [2, 3]. Современное состояние анализа проблематики указанной в названии работы, находится в стадии начального формирования [2, 3]. А именно, для эллиптического оператора с изменяющейся на сети (графе) пространственной переменной развиваются классические методы аппроксимации на сетке графа таким образом, чтобы сохранялись основополагающие свойства вполне непрерывного оператора. Это открывает возможность представления решений начально-краевой задачи в классической интерпретации – в виде обобщенного ряда Фурье по системе собственных функций эллиптического оператора, образующих базис пространства допустимых решений. Следует отметить и еще один немаловажный факт – возможность использования системы собственных функций в виде специального базиса при отыскании приближений слабых решений с помощью интегральных тождеств в классе суммируемых функций. Целью настоящей работы является адаптация классических численных методов на класс указанных выше функций и формирование подходов и методов реализации этой цели, в рамки которых входит анализ свойств устойчивости и сходимости по Нейману дифференциально-разностных задач для эволюционных систем параболического и гиперболического типов. Иллюстрацией полученных результатов является решение задачи управления (перевод системы из заданного начального в заданное конечное состояние) с использованием конечного метода l-проблемы моментов [4].

Спектральные характеристики оператора Лапласа на графе. Пусть задан граф-звезда Γ с ребрами $\gamma_k (k=\overline{1,m})$, примыкающими к внутренней вершине ζ [2]. Ребра $\gamma_k (k=\overline{1,m-1})$ ориентированы "к вершине ζ", ребро γ_m – "от вершин ζ", каждое из ребер $\gamma_k (k=\overline{1,m-1})$ графа Γ параметризуется отрезком $[0,\frac{\pi}{2}]$, ребро γ_m – отрезком $[\frac{\pi}{2},\pi]$, $\xi_k (k=\overline{1,m})$ обозначим граничные вершины графа Γ.

Пусть $C(\Gamma)$ – множество непрерывных функций на Γ, $C[\Gamma]$ – множество кусочно непрерывных функций и $C^2[\Gamma]$ – множество функций, все производные которых до второго порядка включительно принадлежат $C[\Gamma]$. Через $\Re$ обозначим линейное многообразие функций $\varphi(x) = C(\Gamma) \bigcap C^2[\Gamma]$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{d\varphi(x)}{dx}\bigg|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_k} - \frac{d\varphi(x)}{dx}\bigg|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_m} = 0,$$

называемыми в литературе (см., например, [2]) условиями согласования.

На функциях $\varphi(x) \in \Re$ рассмотрим оператор $(A\varphi)(x) \equiv -\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ в $L^2(\Gamma)$, областью определения D_A которого является линейное многообразие

$\Re$ функций, удовлетворяющих условиям Дирихле $\varphi(0)_{\gamma_k} = 0,\ (k = \overline{1, m-1}),\ \varphi(\pi)_{\gamma_m} = 0.$

Теорема 1 [2]. Собственные значения и собственные функции оператора A вещественны, собственные функции ортогональны в $L^2(\Gamma)$.

Ясно, что собственные значения оператора A образуют множество чисел $\{\lambda_n\}_1^\infty$, $\lambda_n = n^2$. Структура множества собственных функций и их представление определяются кратностью собственных значений [2]: при нечетном n – λ_n простое, при четном n – кратно $m-1$. Собственные функции имеют следующий вид ($l = 1, 2, ...$):

при $n = 2l - 1$

$$\varphi_{2l-1}(x) = \frac{2}{\sqrt{l\pi}} sin(2l-1)x, x \in \gamma_k, k = \overline{1, m}; \tag{1}$$

при $n = 2l$

$$\varphi_{2l}^1(x) = \frac{2}{\sqrt{m\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}} sin2lx,\ x \in \gamma_1, \\ 0, x \in \gamma_k,\ k = \overline{2, m-1}, \\ \sqrt{\frac{m}{2}} sin2lx,\ x \in \gamma_m, \end{cases}$$

$$\underset{(i=\overline{2,m-2})}{\varphi_{2l}^{i}(x)} = \frac{2}{\sqrt{m\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{i+1}}(-\frac{1}{\sqrt{i}}) sin2lx,\ x \in \gamma_k, \\ \qquad (k = \overline{1, i-1}) \\ \sqrt{\frac{m}{i+1}} \sqrt{i} sin2lx,\ x \in \gamma_i, \\ 0,\ x \in \gamma_k,\ (k = \overline{i+1, m-1}), \\ \sqrt{\frac{m}{i+1}} \frac{1}{\sqrt{i}} sin2lx,\ x \in \gamma_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$\varphi_{2l}^{m-1}(x) = \frac{2}{\sqrt{m\pi}} \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{m-1}} sin2lx,\ x \in \gamma_k, \\ \qquad (k = \overline{1, m-2}) \\ \sqrt{m-1} sin2lx,\ x \in \gamma_{m-1}, \\ \frac{1}{\sqrt{m-1}} sin2lx,\ x \in \gamma_m. \end{cases}$$

Множество собственных функций обозначим через $\{\tilde{\varphi}_n(x)\}_1^\infty$, оно является ортонормальной системой в пространстве $L^2(\Gamma)$.

Теорема 2 [2]. Система собственных функций $\{\tilde{\varphi}_n(x)\}_1^\infty$ полна и образует ортогональный базис в $L^2(\Gamma)$.

Конечно-разностный аналог оператора Лапласа на графе. Для каждого $k=\overline{1,m-1}$ γ_k^h – сетка ребра γ_k. Множество точек $x_i \in \gamma_k$ $(i=\overline{0,N})$ при $x_i = ih$, где $h=\pi/(2N)$. Пусть γ_m^h – сетка ребра γ_m: $\gamma_m^h = \{x_{N+i} \in \gamma_m (i=\overline{0,N})\}$, $x_{N+i} = \pi/2 + (N+i)h$. Обозначим Γ^h как сетку графа Γ: $\Gamma^h = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \gamma_k^h$ (где x_i – узлы, h – шаг сетки Γ^h). Сеточной функцией будем называть функцию φ^h, определенную на сетке Γ^h: значение φ^h в узле $x_i \in \gamma_k^h$ (обозначается $(\varphi_i)_{\gamma_k}^h$) равно значению $\varphi(x_i)_{\gamma_k}$.

Множество сеточных функций φ^h, удовлетворяющих условию непрерывности и трансверсальности (согласования)

$$(\varphi_N)_{\gamma_k}^h = (\varphi_N)_{\gamma_m}^h \ (k=\overline{1,m-1}) \ \sum_{k=1}^{m-1}\Big((\varphi_N)_{\gamma_k}^h - (\varphi_{N-1})_{\gamma_k}^h\Big) - \Big((\varphi_{N+1})_{\gamma_m}^h - (\varphi_N)_{\gamma_m}^h\Big) = 0 \tag{3}$$

в вершине ζ обозначим через $\Re^h$. Соотношения (3) являются аппроксимацией соотношений множества $\Re$. Рассмотрим оператор A^h на сеточных функциях φ^h из $\Re^h$:

$$A^h\varphi^h = \frac{1}{h^2}\begin{cases} 2(\varphi_1)_{\gamma_k}^h - (\varphi_2)_{\gamma_k}^h, \\ -(\varphi_{i-1})_{\gamma_k}^h + 2(\varphi_i)_{\gamma_k}^h - (\varphi_{i+1})_{\gamma_k}^h, \\ \qquad (i=\overline{2,N-1}) \end{cases}$$

на ребрах $\gamma_k (k=\overline{1,m-1})$,

$$A^h\varphi^h = \frac{1}{h^2}\begin{cases} -(\varphi_{i-1})_{\gamma_m}^h + 2(\varphi_i)_{\gamma_m}^h - (\varphi_{i+1})_{\gamma_m}^h, \\ \qquad (i=\overline{N+1,2N-2}) \\ -(\varphi_{2N-2})_{\gamma_m}^h + 2(\varphi_{2N-1})_{\gamma_m}^h \end{cases}$$

на ребре γ_m. Множество D_{A^h} функций $\varphi^h \in \Re^h$ является областью определения оператора A^h. Функции φ^h удовлетворяют условиям

$$(\varphi_0)_{\gamma_k}^h = 0, \ (k=\overline{1,m-1}), \ (\varphi_{2N})_{\gamma_m}^h = 0. \tag{4}$$

Соотношения (4) описывают точную аппроксимацию условий Дирихле области определения D_A оператора A.

Таким образом, оператор A^h в узлах сетки $\Gamma^h \setminus \{x_N\}$ определяет сеточную функцию $A^h\varphi^h$ и является конечно-разностным аналогом оператора A с точностью аппроксимации равной h^2.

Замечание 1. Оператор A^h наследует свойства симметричности и положительной определенности оператора A.

Собственными векторами оператора A являются $m(N-1)+1$ сеточные функции $\tilde{\varphi}_n^h$ – проекции на сетку Γ^h первых $m(N-1)+1$ собственных функций $\tilde{\varphi}_n(x)$ оператора A. Заметим, что собственные числа ρ_n оператора A^h имеют вид $\rho_n = 4/h^2 \sin^2(nh/2)$, $n=\overline{1,2N-1}$. Если n нечетное, то собственное число простое, а если n четное, то оно кратно $m-1$. Собственные векторы определяются соотношениями (1), (2), если x заменить на ih, а $\gamma_k (k=\overline{1,m})$ – на γ_k^h $(k=\overline{1,m})$.

Замечание 2. Собственные векторы оператора A^h при $n=\overline{1,m(N-1)+1}$ образуют базис в евклидовом пространстве размерностью $m(N-1)+1$ (конечномерный аналог теоремы 2).

Дифференциально-разностная система для уравнения теплопроводности. Пусть функция $u(x,t)$ описывает распределение температур в точках $(x,t)\in\Gamma\times[0,T]$, где $T>0$ – фиксированная постоянная и удовлетворяет следующим соотношениям ($x\in\Gamma$, $t\in(0,T)$):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{5}$$

$$u(x,t)\Big|_{x\in\gamma_k=\frac{\pi}{2}} = u(x,t)\Big|_{x\in\gamma_m=\frac{\pi}{2}}, \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial u(x,t)}{dx}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_k} - \frac{\partial u(x,t)}{dx}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_m} = 0. \tag{6}$$

(здесь $k=\overline{1,m-1}$). Cоотношение (5), (6) называется уравнением распространения тепла на графе Γ при $t\in(0,T)$. Присоединяя к уравнению (5), (6) начальное

$$u(x,0)=\theta(x),\ x\in\Gamma \tag{7}$$

и граничные $(t\in[0,T])$

$$\begin{gathered} u(0,t)_{\gamma_k} = \mu_k(t)\ (k=\overline{1,m-1}), \\ u(\pi,t)_{\gamma_m} = \nu(t). \end{gathered} \tag{8}$$

условия, получаем начально-краевую задачу (5)–(8).

Будем считать, что $R(\Gamma)$ объединение ребер графа Γ, не содержащих концевых точек: $R(\Gamma)=\Gamma\setminus(\partial\Gamma\bigcup\{\zeta\})$. Цилиндр $Ц = R(\Gamma)\times(0,T)$ будет областью задания переменных уравнений (5). При этом соотношения (8) задаются на $\{\zeta\}\times(0,T)$. Функция $u(x,t)$ класса $C^2(Ц)\bigcap C(\Gamma\times[0,T])$ является решением краевой задачи (5)–(8). Она удовлетворяет уравнению (5) в Ц, соотношениям (6) в $\{\zeta\}\times(0,T)$, начальным условиям (7) при $t=0$, $x\in\Gamma$ и граничным условиям (8) при $x\in\partial\Gamma$, $t\in[0,T]$.

Условия согласованности для функций $\varphi(x), \psi(x), \mu_k(t), \nu(t)$:

$$\varphi(0)_{\gamma_k}=\mu_k(0)\ (k=\overline{1,m-1}),\ \varphi(\pi)_{\gamma_m}=\nu'(0),$$
$$\psi(0)_{\gamma_k}=\mu_k'(0)\ (k=\overline{1,m-1}),\ \psi(\pi)_{\gamma_m}=\nu(0),$$

при этом должны выполняться условия гладкости $\varphi(x)\in C^2[\Gamma]$, $\psi(x)\in C^1[\Gamma]$ и $\mu_k(t)\ (k=\overline{1,m-1}),\ \nu(t)\in C^2[0,T]$.

Разностная схема для уравнения теплопроводности. Обозначим с помощью индексов i, j узел соответствующей сеточной функции. Произведем интегрирование каждого дифференциального уравнения в (5) по времени на интервале $[t_j,t_{j+1}]$ ($t_j=j\tau$, $\tau=T/J$, $j=\overline{0,J}$) и заменим интеграл значением подынтегральной функции в узле t_j. Получим явную разностную схему задачи (5)–(8):

$$\frac{u^{j+1}-u^j}{\tau}=(A^h u^h)^j+f^j,\ j=\overline{0,J-1},\quad u^0=\theta. \tag{9}$$

Запишем решение задачи (9) в виде ряда Фурье по собственным векторам $\overset{h}{\varphi}_n$:

$$u^j=\sum_{n=1}^{m(N-1)+1}U_n^j\varphi_n, \tag{10}$$

где

$$U_n^j=\frac{1}{\omega_n}[u^j,\varphi_n]=\frac{1}{\omega_n}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{N-1}(u_i^j)_{\gamma_k}(\varphi_i)_{n_{\gamma_k}}+\frac{1}{\omega_n}\sum_{i=N+1}^{2N-1}(u_i^j)_{\gamma_m}(\varphi_i)_{n_{\gamma_m}}$$

($(\varphi_i)_{n_{\gamma_k}}$ – компоненты вектора $\overset{h}{\varphi}_n$); аналогичное разложение имеет место для функции f^j и θ:

$$f^j=\sum_{n=1}^{m(N-1)+1}F_n^j\varphi_n, F_n^j=\frac{1}{\omega_n}[f^j,\varphi_n]=\frac{1}{\omega_n h^2}\sum_{k=1}^{m-1}\mu_k^j(\varphi_1)_{n_{\gamma_k}}+\frac{1}{\omega_n h^2}\nu^j(\varphi_1)_{n_{\gamma_m}}. \tag{11}$$

$$\theta=\sum_{n=1}^{m(N-1)+1}\Theta_n\varphi_n,\ \Theta_n=\frac{1}{\omega_n}[\theta,\varphi_n],\omega_n=[\varphi_n,\varphi_n].$$

Подставим (10), (11) в (9) и умножим каждое из равенств на $(\varphi_i)_n$. Путем суммирования от 1 до $m(N-1)+1$ получаем систему рекуррентных соотношений для определения коэффициентов U_n^j в разложении (10):

$$U_n^{j+1} = (1-\tau\rho_n)U_n^j + \tau F_n^j,\ \ j=\overline{1,J-1},\ U_n^0 = \Theta_n \qquad (12)$$

(ρ_n – собственные числа оператора A^h).

Исключим неизвестные $U_n^j (j=\overline{1,J-1})$ в (12):

$$U_n^j = r_n^j\Theta_n + \tau\sum_{l=1}^{j} r_n^{j-l}F_n^{l-1},\ \ r_n = 1-\tau\rho_n. \qquad (13)$$

При $(\tau > 0)$ из равенства (13) следует:

$$|U_n^j| \le |r_n|^j |\Theta_n| + \tau\sum_{l=1}^{j} |r_n|^{j-l} |F_n^{l-1}|.$$

Заменим $|F_n^l|$ $(l=\overline{1,J-1})$ на $|F_n| = \max\limits_l |F_n^l|$:

$$|U_n^j| \le |r_n|^j |\Theta_n| + \tau\frac{1-|r_n|^j}{1-|r_n|}|F_n|.$$

Если $|r_n| < 1$, то разностная схема (9) будет устойчивой по Нейману [5]. Выражения $|r_n|^j$, $\tau(1-|r_n|^j)/(1-|r_n|)$ будут равномерно ограничены:

$$|r_n|^j < 1,\quad \tau(1-|r_n|^j)/(1-|r_n|) < j\tau < J\tau = T \quad (n=\overline{1,m(N-1)+1}).$$

Дифференциально-разностная система для уравнения колебаний. Функцию распределения амплитуд колебаний ($0 < T < \infty$) обозначим через $u(x,t)$, $(x,t)\in\Gamma\times[0,T]$. Опишем граничной задачей процесс распространения колебаний на графе Γ при $t\in[0,T]$:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad (14)$$

$$u(x,t)\Big|_{x\in\gamma_k=\frac{\pi}{2}} = u(x,t)\Big|_{x\in\gamma_m=\frac{\pi}{2}}\ \ (k=\overline{1,m-1}),$$

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_k} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_m} = 0, \qquad (15)$$

$$u(x,0) = \theta(x),\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dot{\theta}(x),\ x\in\Gamma, \qquad (16)$$

$$u(0,t)_{\gamma_k} = \mu_k(t)\ (k=\overline{1,m-1}),\ u(\pi,t)_{\gamma_m} = \nu(t). \qquad (17)$$

Цилиндр Ц $= R(\Gamma)\times(0,T)$ будем считать областью задания переменных уравнения (14), соотношения (15) задаются на $\{\zeta\}\times(0,T)$. Функция $u(x,t)$ класса $C^2(\Gamma\times[0,T])$ является решением краевой задачи (14)–(17). Эта функция удовлетворяет уравнениям (14) в Ц, соотношениям (20) в $\{\zeta\}\times[0,T]$, начальным условиям (16) при $t=0$, $x\in\Gamma$, и граничным условиям (17) при $x\in\partial\Gamma$, $t\in[0,T]$. При этом выполнены условия согласованности для функций $\theta(x),\ \dot{\theta}(x),\ \mu_k(t),\ \nu(t)$:

$$\theta(0)_{\gamma_k} = \mu_k(0)\ (k=\overline{1,m-1}),\ \theta(\pi)_{\gamma_m} = \nu'(0),$$
$$\dot\theta(0)_{\gamma_k} = \mu_k'(0)\ (k=\overline{1,m-1}),\ \dot\theta(\pi)_{\gamma_m} = \nu(0),$$

и условия $\theta(x)\in C^2[\Gamma]$, $\dot\theta(x)\in C^1[\Gamma]$ $\mu_k(t)\ (k=\overline{1,m-1})$, $\nu(t)\in C^2[0,T]$.

Разностная схема для уравнения колебаний. Для задачи (14)–(17) используем явную разностную схему $(\tau = T/J)$:

$$\frac{u^{j+1}-2u^j+u^{j-1}}{\tau^2}+(A^h u^h)^j = f^j,\ j=\overline{0,J-1}, \tag{18}$$

$$u^0=\theta,\ u^1=\theta+\tau\dot\theta-\frac{\tau^2}{2}A^h\theta+f^0. \tag{19}$$

Аналогично (10), (11), принимая во внимание представление решения задачи (18), (19) в виде ряда Фурье по собственным векторам φ_n, запишем систему соотношений для определения коэффициентов U_n^j для u^j:

$$\frac{U_n^{j+1}-2U_n^j+U_n^{j-1}}{\tau^2}+\rho_n U_n^j = F_n^j,\ \ U_n^0=\Theta_n,$$
$$U_n^1=\Theta_n+\tau\dot\Theta_n-\frac{\tau^2}{2}\rho_n\Theta_n+F_n^0,$$

где $\Theta_n, \dot\Theta_n, F_n^j$ – коэффициенты в разложениях по собственным векторам φ_n компонент $\theta, \dot\theta, f^j$.

Условия счетной устойчивости для (18), (19) при $F_n^j=0$ имеют вид:

$$\eta_n^2-2(1-\mu_n^2)\dot\eta_n+1=0,\ \mu_n^2=\frac{1}{2}\tau^2\rho_n. \tag{20}$$

Если $\mu_n<2$ (т.е. при $\frac{\tau}{h}<1$), то оба корня η_n^1, η_n^2 уравнения (20) комплексные $|\eta_n^i|=1\ (i=1,2)$ и значит разностная схема (18), (19) будет устойчивой.

Оценки коэффициентов U_n^j показывают возможность анализа устойчивости по Нейману для разностных схемы (18), (19) и получения аналога теоремы А.Ф.Филиппова о сходимости этой схемы в терминах шагов h и τ.

Конечная проблема моментов в задаче управления. Переведем дифференциально-разностную систему (9) или (18), (19) из начального состояния

$$(u_i^0)=(\theta_i)$$

(для задачи (9)) или начального состояния

$$(u_i^0)=(\theta_i),\ \ (u_i^1)=(\theta_i)+\tau(\dot\theta_i)+\frac{\tau^2}{2}\left(\frac{-(\theta_{i-1})+2(\theta_i)-(\theta_{i+1})}{h^2}+(f_i^0)\right)$$

(для задачи (18), (19)) в конечное состояние

$$(u_i^J)=(\vartheta_i) \tag{21}$$

(для задачи (9)) или конечное состояние

$$(u_i^J)=(\vartheta_i),\quad (u_i^{J-1})=(\vartheta_i)-\tau(\dot{\vartheta}_i) \tag{22}$$

(для задачи (18), (19)). Пусть индекс i меняется в соответствии с выбранной индексацией сетки Γ^h.

Для уравнения теплопроводности получим разностную схему

$$(u^{j+1})=(u^j)+\tau([A^h u^h]^j)+\tau(f^j). \tag{23}$$

Конечные условия (21), учитывая соотношения (23), дают равенства (моментные равенства) относительно $\mu_k^j,\ k=\overline{1,m-1}$ и ν^j при $j=\overline{1,J-1}$:

$$(u^{J-1})+\tau([A^h u^h]^{J-1})+\tau(f^{J-1})=\vartheta^h, \tag{24}$$

на сетке Γ^h, где сужения $(u^{J-1})_{\gamma_k}$ $(k=\overline{1,m-1})$ и $(u^{J-1})_{\gamma_m}$ на сетке $\gamma_k (k=\overline{1,m})$ зависят от $\mu_k^1,\mu_k^2,...,\mu_k^{J-1}$ $(k=\overline{1,m-1})$ и $\nu^1,\nu^2,...,\nu^{J-1}$.

Для уравнения колебания из разностной схемы (18), (19) получаем представление

$$(u^{j+1})=(2u^j)-\tau^2([A^h u^h]^j)-(u^{j-1})+\tau^2(f^j). \tag{25}$$

Конечные условия (22), учитывая соотношения (25), дают равенства (моментные равенства) относительно $\mu_k^j, k=\overline{1,m-1}$ и ν^j при $j=\overline{1,J-1}$:

$$(u^{J-1})=\vartheta^h-\tau\dot{\vartheta}^h(u^{J-2})=\vartheta^h-\tau\dot{\vartheta}^h-\tau^2([A^h u^h]^{J-1})+\tau^2(f^{J-1}), \tag{26}$$

где сужения $(u^{J-1})_{\gamma_k}$ и (u^{J-1}), как и выше, зависят от $\mu_k^1,\mu_k^2,...,\mu_k^{J-1}$ и $\nu^1,\nu^2,...,\nu^{J-1}$. Таким образом, получены моментные равенства (24) и (26) для определения решения задачи управления.

Заключение. Рассмотрены математические модели в формализмах начально-краевых задач для эволюционных уравнений с распределенными параметрами на графе, описывающие колебательные и гидродинамические процессы. Проведен подробный анализ эллиптической части уравнений. При этом упор сделан на построение сходящихся разностных схем и доказательство их устойчивости в метриках пространств сетчатых функций. Особое место уделено изучению задачи управления, состоящей в определении граничных управляющих воздействий на систему, дающих возможность перевода этой системы из начального в конечное состояние. Основополагающей базой к тому является использование метода моментов в терминах систем (24) и (26) для задач (9) и (18), (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г.И., Лебедев В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981. 456 с.
2. Провоторов В.В. Разложение по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля на графе-пучке // Известия вузов. Серия математика, № 3 (550), 2008, С. 50-62.
3. Artemov M.A., Baranovskii E.S., Zhabko A.P., Provotorov V.V. On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network. Journal of Physics. Conference Series, 2019, vol. 1203, Article ID 012094. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012094
4. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.:Наука, 1975. 568 с.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.

O.R. Balaban

APPROXIMATION OF EVOLUTIONARY DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS ON THE NETWORK AND MOMENT METHODS

VUNC Air Force «Military Academy named after Professor N.Y. Zhukovsky and Y.A. Gagarin» ,Voronezh

The paper considers evolutionary problems underlying the mathematical description of oscillatory and hydrodynamic processes in network-like objects (waveguides, hydraulic networks, etc.). The main attention is paid to the analysis of the properties of the elliptic operator (the one-dimensional Laplace operator) with distributed parameters on the network, establishing the spectral completeness of the system of eigenfunctions in the class of square-integrable functions. Conditions are obtained that guarantee Neumann stability (spectral stability) of difference schemes for evolutionary problems; a solution to the moment method control problem is presented. The methods for studying evolutionary problems are based on the properties of a positive definite elliptic operator: a system of eigenfunctions forms a basis in the space of functions summable with a square; series in the system of eigenfunctions admit a priori estimates of the solutions of the evolutionary problem; approximation of an elliptic operator reduces it to a finite-dimensional operator in a finite-dimensional space of grid functions with a natural Euclidean norm, which (a finite-dimensional operator) approximates the original with any predetermined accuracy in the sense of the norm of the space of functions summable squared. For evolutionary problems, an explicit first-order approximation scheme on the graph grid (parabolic system) and an explicit second-order approximation scheme (hyperbolic system) are used. The oscillatory properties of the obtained operators are established, similar to the classical oscillatory properties. For difference schemes of parabolic and hyperbolic systems of equations, conditions are obtained that guarantee countable spectral stability (stability in the sense of Neumann) and, therefore, the possibility of obtaining analogues of A.F. Filippova on the convergence of difference schemes in terms of approximation steps of a graph grid. To illustrate the applicability of the approach used, the control problem is considered - the translation of evolutionary systems of parabolic and hyperbolic types from given initial to given final states; conditions are obtained that guarantee the controllability of the systems under study.

Keywords: laplace operator on a graph, evolution problems, approximation, difference schemes, stability, convergence, method of moments.

REFERENCES

1. Marchuk G.I., Lebedev V.I. Numerical methods in the theory of neutron transfer. M.: Atomizdat, 1981.456 p.
2. Provotorov V.V. Expansion in eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem on a graph-bundle // Izvestiya Vuzov. Series of Mathematics, No. 3 (550), 2008, pp. 50-62.
3. Artemov M.A., Baranovskii E.S., Zhabko A.P., Provotorov V.V. On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network. Journal of Physics. Conference Series, 2019, vol. 1203, Article ID 012094. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012094
4. Butkovsky A.G. Control methods for systems with distributed parameters. M.: Science, 1975. 568 p.
5. Marchuk G.I. Methods of Computational Mathematics. M.: Science, 1980. 536 p.