Моделирование, оптимизация и информационные технологии.
Научный журнал, Том 7, № 3 http://moit.vivt.ru/ **2019**

УДК 519.833 DOI: 10.26102/2310-6018/2019.26.3.009

Б.А. Торопов

МАКСИМИЗАЦИЯ КОНКУРЕНТНОГО ВЛИЯНИЯ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ НА ОСНОВЕ ИГРЫ ВОРОНОГО

Академия управления МВД России

Социальные сети по своей природе являются средой продвижения идей, товаров, технологий и инноваций в широком смысле. Решение индивида о принятии или отвержении продвигаемой инновации в существенной степени зависит от решений его окружения в социальной сети. В случае конкурентного распространения в социальной сети двух и более взаимоисключающих влияний, результаты в виде подмножеств участников сети, попавших под каждое из влияний, будут в значительной степени зависеть от подмножеств участников, являвшихся инициаторами этих влияний. Теоретико-игровая модель конкурентного распространения влияний предполагает, что каждым влиянием управляет игрок, отбирающий соответствующее подмножество участников-инициаторов. Показано, что такая игра по сути является игрой Вороного, осуществляемой в сложно структурированном пространстве. Рассматриваются некоторые свойства рациональной стратегии игрока, делающего ход последним, а также возможность выработки такой стратегии при помощи жадных алгоритмов. Предложены конкурентные метрики центральности, перспективные для использования в жадных алгоритмах формирования подмножества участников-инициаторов последним игроком. Показано, что имеется выраженная взаимозависимость между конкурентной центральностью по близости, конкурентной центральностью по промежуточности (изолирующей центральностью) и результирующим количеством участников сети, попавших под влияние игрока, делающего последний ход.

Ключевые слова: социальная сеть, распространение влияний, конкурентные влияния, игра Вороного, граф, центральность

1. Введение

Социальные сети любой природы могут быть описаны при помощи графов, вершины которых соотносятся с индивидами, составляющими сеть, а ребра – с их взаимоотношениями (дружба, совместная работа, переписка, финансовые отношения и т.п.). При принятии решения о том, принять какую-либо инновацию (новая идея, новый товар или технология) или отвергнуть ее, индивид, как правило, подвергается прямому или косвенному влиянию своего окружения в социальной сети. Он наблюдает за тем, принята ли инновация соседними к нему вершинами в социальном графе.

Процесс распространения инноваций в сети может быть организован. Существует масса ситуаций в реальном мире, когда с целью обеспечить широкое и/или быстрое распространение инновации по сети путем, что называется, «из уст в уста», интересанты, стоящие за продвигаемой инновацией выявляют лидеров мнений, чтобы использовать их как инициаторов влияния и обеспечить дальнейшее лавинообразное распространение этого влияния.

Формально задачу максимизации влияния в социальной сети можно сформулировать таким образом: задана социальная сеть в виде графа и некоторая модель распространения влияния, требуется определить k вершин графа, таких, что по окончанию процесса распространения влияния (согласно имеющейся модели), ожидаемое количество зараженных вершин было бы максимальным.

В настоящей статье рассматривается случай, когда в сети распространяются конкурирующие влияния. Можно привести массу примеров такого развития событий из реального мира, когда новая модель телефона фирмы A конкурирует с новыми моделями фирм B, C и т.д., политическая пропаганда конкурирует с контрпропагандой и т.п. Сегодня известно много различных моделей распространения влияний. В частности, для сетевых структур существуют модели независимых каскадов и пороговые модели, генерализация которых проведена в работе [1]. Для линейного одномерного пространства известна модель Хотеллинга, отражающая влияние предвыборной агитации на население. В целом же решение игры конкурентного распространения влияний в линейных пространствах будет структурно соответствовать диаграмме Вороного [2], многократно описанной в научной и учебной литературе, например [3].

Однако социальные сети, а следовательно, и соответствующие им графы не являются линейными пространствами, а организованы сложным образом. Вместе с тем, каждая точка таких пространств, являющаяся вершиной графа, обладает рядом характеристик, отражающих ее положение в этом сложно устроенном пространстве. Такие характеристики относятся к метрикам центральности вершин в графах. В настоящей работе показано, что при конкурентном распространении влияний в социальных сетях можно предложить метрики центральности, позволяющие игрокам (интересантам распространения конкурирующих влияний) отбирать в графе вершины – инициаторы влияний таким образом, что получаемые решения будут максимально приближены к решениям игры Вороного.

2. Модели распространения влияния в линейном пространстве

Простейшим примером игрового взаимодействия по распространению влияния является модель линейного города, впервые предложенная Хотеллингом для размещения производств. В работе [4] проведена типология моделей на основе модели Хотеллинга, а также выделены основные результаты исследования [5], а именно следующие:

- модель чрезвычайно чувствительна к числу конкурентов. Когда число конкурентов равно двум возникает минимальная дифференциация их местоположения, что рассматривалось, в частности, Доунсом [6] при анализе близости политических платформ демократов и республиканцев в США;

- при числе конкурентов более двух в состоянии равновесия они могут располагаться как симметрично, так и асимметрично;

- если число конкурирующих сторон более чем в два раза превосходит число мод в функции распределения объектов влияния, то равновесия не существует. Так в оригинальной модели линейного города (одна мода) уже с тремя конкурирующими сторонами нет равновесия Нэша в чистых стратегиях.

Более общий случай модели Хотеллинга – игра Вороного, представляющая собой геометрическую модель распределения объектов на плоскости Q (в общем случае – в n-мерном пространстве Q), где точка пространства s «владеет» той частью этого пространства, которая ближе к ней, чем к любой другой точке.

Решение игры Вороного в существенной степени зависит от того, происходит ли игра в один или более раундов, а также от размерности пространства, на котором происходит игра, и ряда других факторов, которые характеризуют это пространство.

Так в [7] показано, что в игре Вороного двух игроков на линейном отрезке, равно как и на окружности, и, если игра происходит более, чем в один раунд, у второго игрока всегда есть выигрышная стратегия.

При игре Вороного на окружности в один раунд и при равном количестве точек игроков неизбежно происходит ничья при рациональной игре. Легко убедиться, что при игре в один раунд [8] на линейном отрезке, модель сводится к модели Хотеллинга, с той разницей, что точки двух игроков не могут располагаться в одном и том же месте. То есть второй игрок, наоборот, проигрывает при рациональной игре, но со стремящимся к нулю перевесом. Однако в случае перевеса в одну точку при их произвольном количестве n у первого игрока, второй всякий раз будет выигрывать часть пространства, стремящуюся к 1/2n, при рациональной игре на линейном отрезке.

В любом случае симметричного пространства с отсутствием возможности расположения точки в центре симметрии в игре Вороного двух игроков в один раунд произойдет ничья. Наилучшим ответом второго игрока на любую стратегию первого будет симметричное размещение своих точек.

Если количество точек игроков не равно, то игрок с большим количеством точек, делающий ход последним, может выиграть с существенным перевесом. Несложно убедиться, что при количестве точек второго игрока $|S_2|$ вдвое превышающем количество точек $|S_1|$ первого, второй выигрывает практически 100% пространства.

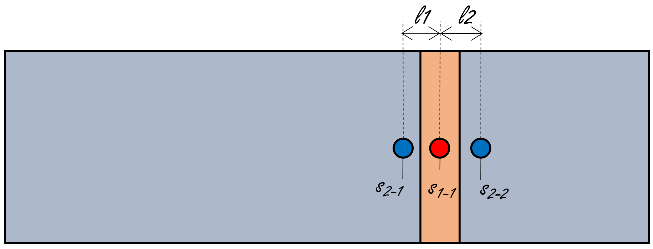


Рисунок 1 - Размещение точек второго игрока s_{2-1} и s_{2-2} вокруг единственной точки первого игрока s_{1-1} таким образом, что второй выигрывает практически все пространство при $l_1=l_2\to 0$

В работах [7, 8] задача нахождения оптимальных стратегий в игре Вороного обозначается как актуальная и требующая решения для случаев многомерного пространства, равно как и для случаев асимметричного пространства или пространства с нелинейными свойствами.

Как уже отмечалось, социальные сети, имеющие место в реальном мире, как раз и относятся к случаям сложно организованного, асимметричного, и, кроме того, нелинейного пространства. Решения подобной игры в общем виде, пригодного для произвольного социального графа сегодня не найдено, однако некоторые свойства возникающих равновесий и механизмы выработки стратегий игроков поддаются формулировке и описанию.

3. Механизм формирования диаграммы Вороного на множестве вершин социального графа

Введем некоторые обозначения. $G\ (V,\ E)$ – граф, отображающий социальную сеть (социальный граф), $V = \{v_1,\ v_2,\ \dots\ v_n\}$ – множество вершин графа, E – множество ребер.

В социальном графе присутствует $m \geq 2$подмножеств вершин $\{S_1, S_2 \dots S_m\} \subset V$, каждое из которых – инициатор влияния своего типа. Эти подмножества не пересекаются, то есть, любая вершина u, входящая в любое из подмножеств, не входит ни в одно другое, $\forall u \in S_i \colon u \notin S_{-i}$.

Предложим следующий механизм формирования диаграммы Вороного. Влияние вершины $u \in S_i$ на вершину $v \in V, v \notin \{S\}$ задается как:

$$\varphi(v,u) = \rho^{l_{v,u}},$$

где: $\rho \in [0;1]$ – коэффициент затухания влияния;

$l_{v,u}$ – кратчайший путь от v до u.

Тогда совокупное влияние одного из подмножеств S_i на v:

$$\varphi(v,S_i) = \sum_{u \in S_i} \rho^{l_{v,u}}$$

Итоговая принадлежность v к одному из n влияний определяется тем, какое из влияний на v наибольшее:

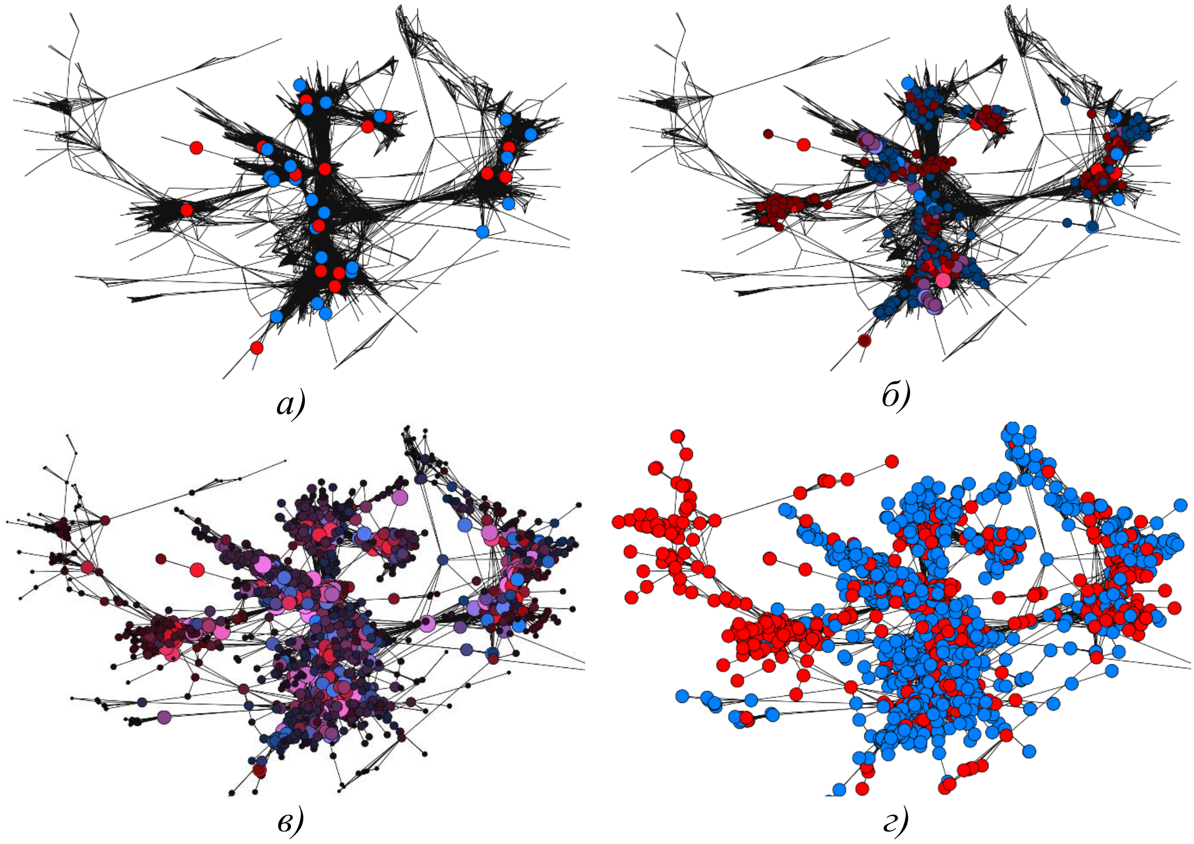
$$\omega(v) = \underset{i}{argmax}(\varphi(v, S_i)) = \underset{i}{argmax} \sum_{u \in S_i} \rho^{l_{v,u}}$$

При равных значениях $\varphi(v, S_i)$ и $\varphi(v, S_j)$, $i \neq j$ принадлежность вершины v задается случайным образом к одному из этих влияний. Чем больше изначально свободных вершин принадлежит к k-му влиянию, тем большее значение принимает функция полезности этого влияния:

$$W(S_k) = |v \in V: \omega(v) = k| = \left| v \in V: \underset{i}{argmax} \sum_{u \in S_i}^{|S_i|} \rho^{l_{v,u}} = k \right|$$

Алгоритм вычисления $\omega(v): v \in V, v \notin \{S_1, S_2 \dots S_m\}$ итеративен по длине кратчайшего пути l, изменяющейся от 1 до диаметра d графа, $l \in [1; d]$. На каждом шаге вычисляются $\varphi_l(v, S_i)$.

Для двух конкурирующих влияний, «красного» и «синего», можно отобразить динамику подверженности вершин графа совокупности этих влияний. Подмножества вершин инициаторов – S_{Red} и S_{Blue} для «красного» и «синего» влияний соответственно.



а) *б)*

в) *г)*

Рисунок 2 - Динамика подверженности вершин графа совокупности «красного» и «синего» влияний: а) инициация алгоритма – заданы подмножества S_{red} и S_{blue}; б) итерация 1; в) итерация 12 (завершающая, d = 12); г) рассчитана итоговая принадлежность вершин

Таким образом, полученная на рисунке 2.г принадлежность вершин к двум имеющимся в социальном графе влияниям является по сути диаграммой Вороного, построенной на социальном графе.

4. «Конкурентные» метрики центральности

Теперь, учитывая, что за распространяемыми влияниями стоят некие интересанты – игроки, зададимся вопросом, какие именно точки сложного пространства, заданного социальным графом, им следует отбирать в качестве инициаторов для максимизации своей доли в диаграмме Вороного.

Наиболее очевидна взаимосвязь с влиянием в социальном графе такой центральности вершин как центральность по близости.

Именно центральность по близости позволяет максимизировать с некоторым приближением к оптимуму достигаемое влияние в неконкурентном случае, как это показано в работах, приведенных в предыдущем разделе.

Метрика центральности по близости рассчитывается следующим образом:

$$c_{cl}(v) = \frac{|V| - 1}{\sum_{u \in (V \setminus \{v\})} l_{u,v}}$$

Отметим, что существуют и другие подходы к оценке значимости вершин для максимизации влияний. Так в работе [9] автор на основе эмпирических данных показывает важность собственного вектора графа для определения группы влияния при распространении инноваций в традиционном обществе. В работе [10] предложена метрика центральности распада, сходная с центральностью по близости, также опирающаяся на значения длин кратчайших путей.

$$c_{dec}(v) = \sum_{u \in V\{v\}} \rho^{l_{u,v}}$$

Для конкурентного случая можно предложить адаптированный вариант метрики, опирающейся на длины кратчайших путей, в основе которого лежит предположение о том, что в какой мере вершины близки к источникам влияния первого типа, в такой мере они менее подвержены влиянию второго типа. Тогда, если решение принимает второй игрок («синий»), а подмножество «красных» вершин – инициаторов задано как S_{Red}, то оценить конкурентную центральность по близости вершины v второй игрок может так:

$$c_{ccl}(v) = (|v : v \in V \setminus (S_{Red})| - 1)\left(\frac{1}{\sum_{u \in (V \setminus S_{Red})} l_{u,v}} - \frac{1}{\sum_{u \in S_{Red}} l_{u,v}}\right)$$

Нормировка по $(|v: v \in V \backslash (S_{Red})| - 1)$ в целом не обязательна, но дает возможность интерпретировать смысл выражения так: чем ближе значение $c_{ccl}(v)$ к +1, тем более вершина *v* конкурентно-центральна по близости для «синего» влияния при известном S_{Red}, то есть тем *v* потенциально полезнее для включения в S_{Blue}. И наоборот, чем ближе $c_{ccl}(v)$ к -1, тем менее она полезна для включения в S_{Blue}.

Очевидно, что в конкурентном случае для игрока, делающего ход вторым, важно не только обеспечить короткие пути от собственных источников влияния до вершин-объектов влияния, но и попытаться отсечь кратчайшие пути от инициаторов влияния первого игрока. Оценить, какое количество кратчайших путей проходит через каждую вершину позволяет метрика центральности по промежуточности [11], вычисляемая как:

$$c_{bet}(v) = \sum_{\{u,w\} \in (V \backslash \{v\})} \frac{\sigma_{u,w}(v)}{\sigma_{u,w}} * \frac{2}{(|V| - 1)(|V| - 2)},$$

где: $\sigma_{u,w}$ – количество кратчайших путей, связывающих пару вершин *u, w,* такую, что $u \neq v \neq w$;

$\sigma_{u,w}(v)$ – количество кратчайших путей, связывающих пару вершин *u, w* и пролегающих через вершину *v*.

Это выражение для каждой вершины графа характеризует общее количество кратчайших путей, пролегающих через данную вершину. Для конкурентного же случая важно не общее их количество, а количество таких кратчайших путей, которые соединяют вершины – инициаторы влияния первого типа и вершины – объекты влияния. Конкурентная центральность по промежуточности или изолирующая центральность может быть рассчитана по выражению:

$$c_{bet}(v) = \sum_{u \in (V \backslash \{v, S_{Red}\})} \frac{\sigma_{u,S_{Red}}(v)}{\sigma_{u,S_{Red}}} * \frac{1}{(|V \backslash S_{Red}| - 1)},$$

5. Основные результаты. Влияние конкурентных центральностей по близости и по промежуточности на эффективность стратегии второго игрока

Для оценки предложенных метрик центральности, как факторов эффективности стратегии второго игрока проведена серия вычислительных экспериментов из 10 000 имитаций конкурентного распространения влияний на основе модели, рассмотренной в разделе 3. Коэффициент затухания влияния ρ задан равным 0,5. Средой распространения влияний выступал граф, состоящий из 10 пользовательских графов Facebook. (https://snap.stanford.edu/data/egonets-Facebook.html). Подмножества вершин – инициаторов первого – «красного» и второго – «синего» влияний выбирались случайным образом и насчитывали случайное количество от 15 до 30 элементов.

При помощи корреляционного анализа оценивались взаимозависимости следующих показателей:

$|S_{Red}|$ – мощность подмножества источников «красного» влияния;

$|S_{Blue}|$ – мощность подмножества источников «синего» влияния;

W_{Red} – мощность подмножества вершин, попавших под «красное» влияние;

W_{Blue} – мощность подмножества вершин, попавших под «синее» влияние;

$c_{cl}(S_{Red})$ – групповая центральность по близости источников «красного» влияния;

$c_{cl}(S_{Blue})$ – групповая центральность по близости источников «синего» влияния;

$c_{cbet}(S_{Blue})$ – групповая конкурентная центральность по промежуточности (изолирующая центральность) источников «синего» влияния;

$c_{ccl}(S_{Blue})$ – групповая конкурентная центральность по близости источников «синего» влияния.

Таблица 1 - Матрица парных коэффициентов корреляции для показателей конкурентного влияния в социальном графе

	$\vert S_{Red}\vert$	$\vert S_{Blue}\vert$	W_{Red}	W_{Blue}	$c_{cl}(S_{Red})$	$c_{cl}(S_{Blue})$	$c_{cbet}(S_{Blue})$	$c_{ccl}(S_{Blue})$
$\vert S_{Red}\vert$	1							
$\vert S_{Blue}\vert$	-0,02	1						
W_{Red}	0,51	-0,67	1					
W_{Blue}	-0,5	0,68	-0,99	1				
$c_{cl}(S_{Red})$	0,88	0,16	0,44	-0,43	1			
$c_{cl}(S_{Blue})$	0,16	0,89	-0,64	0,66	0,34	1		
$c_{cbet}(S_{Blue})$	-0,6	0,5	-0,78	0,77	-0,5	0,44	1	
$c_{ccl}(S_{Blue})$	-0,61	0,66	-0,9	0,93	-0,54	0,59	0,81	1

Результаты эксперимента, приведенные в таблице 1 показывают, что наибольшее влияние на мощность подмножества вершин, попавших под «синее» влияние оказывают следующие факторы (в порядке возрастания значения коэффициента корреляции по модулю): $c_{cl}(S_{Red})$, r = -0,43; $|S_{Red}|$, r = - 0,5; $c_{cl}(S_{Blue})$, r = 0,66; $|S_{Blue}|$, r = 0,68; $c_{cb}(S_{Blue})$, r = 0,77; $c_{ccl}(S_{Blue})$, r = 0,93. Наибольший по модулю коэффициент корреляции - 0,99 наблюдается между количествами вершин подверженных противоположным влияниям, что очевидно, и не являлось предметом исследования. Среди прочих показателей конкурентная центральность по близости и изолирующая центральность занимают два первых места.

6. Заключение

Таким образом, предложенные метрики центральности, имеющие место в случае конкурентного распространения влияний в социальных сетях, а именно: конкурентная центральность по близости и изолирующая центральность, показывают существенную взаимосвязь с результатами, получаемыми в имитационном эксперименте вторым игроком («синими»).

В свете полученного результата актуальным представляется поиск эффективных методов и алгоритмов расчета предложенных метрик, а также поиска на графе подмножеств вершин, обладающих наибольшими групповыми значениями конкурентной центральности по близости и изолирующей центральности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kempe, D., Kleinberg, J., Tardos, E.: Maximizing the spread of influence in a social network // In: Proc. 9th KDD, 2003. pp. 137–146.
2. Voronoi, G. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques // J Reine Angew Math No. 134, 1908. pp. 198–287.
3. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. – М.: Мир, 1989. 478 С.
4. Торбенко А.М. Модели линейного города: обзор и типология // Журнал Новой экономической ассоциации. № 1 (25), 2015. С. 12-38.
5. Eaton C.B., Lipsey R.G. The Principle of Minimum Differentiation Reconsidered: Some New Developments in the Theory of Spatial Competition // The Review of Economic Studies. Vol. 42. No. 1, 1975. pp. 27–49.
6. Downs A. An Economic Theory of Political Action in a Democracy // The Journal of Political Economy. Vol. 65, No. 2, 1957. pp. 135-150.
7. Ahn, H., Cheng, S., Cheong, O., Golin, M., van Oostrom, R.: Competitive facility location along a highway // In: Computing and Combinatorics: 7th Annual International Conference, COCOON 2001, Guilin, China, 2001. pp. 237–246.
8. Cheong, O., Har-Peled, S., Linial, N., Matousek, J.: The one-round Voronoi game // Discrete and Computational Geometry. No. 31, 2004. pp. 125–138.
9. Jackson M.O. Social and Economic Networks. Princeton University Press, 2008. 520 p.
10. Jackson M.O., Wolinsky A. A Strategic Model of Social and Economic Networks // Journal of Economic Theory. Vol. 71. No. 1, 1996. pp. 44 – 74.

11. Freeman, L. A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness // Sociometry, Vol. 40. No. 1, 1977. pp. 35-41.

B.A. Toropov

CONCURRENT INFLUENCE MAXIMIZATION IN SOCIAL GRAPH ON THE VORONOI GAME BASIS

Management Academy of the Ministry of the Interior of Russia

Social networks by their nature are a environment for promoting ideas, goods, technology and innovations in a broad sense. The decision of an individual to accept or reject the promoted innovation depends to a significant extent on the decisions of his environment in the social network. In the case of competitive distribution of two or more mutually exclusive influences in the social network, the results in the form of subsets of the network participants who fell under each of the influences will largely depend on subsets of the participants who initiated these influences. The game-theoretic model of competitive distribution of influences assumes that each influence is controlled by the player who selects the corresponding subset of participants-initiators. It is shown that such a game is essentially a game of Voronoi, carried out in a complex structured space. Some properties of the rational strategy of the player making the last move are considered, as well as the possibility of developing such a strategy with the help of greedy algorithms. Competitive centrality metrics promising for use in greedy algorithms of formation of a subset of participants-initiators by the last player are proposed. It is shown that there is a pronounced interdependence between competitive centrality in proximity, competitive centrality in intermediacy (isolating centrality) and the resulting number of network participants who fell under the influence of the player making the last move.

Keywords: social network, influence spread, concurrent influence, Voronoi game, graph, centrality

REFERENCES

1. Kempe, D., Kleinberg, J., Tardos, E.: Maximizing the spread of influence in a social network // In: Proc. 9th KDD, 2003. pp. 137–146.
2. Voronoi, G. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques // J Reine Angew Math No. 134, 1908. pp. 198–287.
3. Prepata F., Shamos M. Vichislitelnaya geometria: Vvedenie. – M.: Mir, 1989. 478 p.
4. Torbenko A.M. Modeli lineinogo goroda: obzor I tipologia // Journal Novoi economicheskoi associacii. No. 1 (25), 2015. p. 12-38.
5. Eaton C.B., Lipsey R.G. The Principle of Minimum Differentiation Reconsidered: Some New Developments in the Theory of Spatial Competition // The Review of Economic Studies. Vol. 42. No. 1, 1975. pp. 27–49.
6. Downs A. An Economic Theory of Political Action in a Democracy // The Journal of Political Economy. Vol. 65, No. 2, 1957. pp. 135-150.
7. Ahn, H., Cheng, S., Cheong, O., Golin, M., van Oostrom, R.: Competitive facility location along a highway // In: Computing and Combinatorics: 7th

Annual International Conference, COCOON 2001, Guilin, China, 2001. pp. 237–246.

8. Cheong, O., Har-Peled, S., Linial, N., Matousek, J.: The one-round Voronoi game // Discrete and Computational Geometry. No. 31, 2004. pp. 125–138.
9. Jackson M.O. Social and Economic Networks. Princeton University Press, 2008. 520 p.
10. Jackson M.O., Wolinsky A. A Strategic Model of Social and Economic Networks // Journal of Economic Theory. Vol. 71. No. 1, 1996. pp. 44 – 74.
11. Freeman, L. A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness // Sociometry, Vol. 40. No. 1, 1977. pp. 35-41.