УДК 519.866.2 DOI: 10.26102/2310-6018/2019.26.3.014

Е.Б. Грибанова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ЦЕНЫ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Томск, Россия

Актуальность исследования обусловлена высоким влиянием ценовой политики на эффективность деятельности предприятия. В статье представлено описание метода на основе обратных вычислений для решения задачи оптимизации цены. Метод предполагает решение задачи безусловной оптимизации и корректировку полученных значений аргументов с учетом ограничения. При этом минимизируется сумма квадратов приращений аргументов с учетом влияния аргументов на изменение целевой функции. Метод является более простым в компьютерной реализации по сравнении с классическими методами нелинейной оптимизации, задача оптимизации цены сводится к безусловной оптимизации и решению системы уравнений. В статье рассмотрено решение задачи формирования цен на продукцию при максимизации прибыли от продажи продукции и ограниченном объеме поставок. При этом предполагается линейная зависимость спроса от цены. Представлено сравнение полученного результата с решением задачи в программе Mathcad с использованием стандартных функций. Материалы статьи представляют практическую ценность для организаций для планирования ценовой политики, а также для специалистов, осуществляющих разработку моделей для принятия решений в области экономики. Представленный метод может быть использован в системах поддержки принятия решений.

Ключевые слова: оптимизация цены, обратные вычисления, квадратичное программирование, прогнозирование спроса

Введение. Формирование ценовой политики является важной частью деятельности организации, которая обуславливает её финансовые результаты. При установлении цены необходимо учитывать такие факторы как затраты предприятия, потребительский спрос, уровень конкуренции, существующие ограничения связанные с объемом производства и доставки товаров. При этом основной задачей является максимизация таких показателей как выручка и прибыль. Кроме того, ценообразование является неотъемлемым элементом маркетинговых мероприятий, проводимых с целью привлечения новых клиентов и их последующего удержания. Многообразие моделей и методов в области ценообразования обусловлено различной сложностью и спецификой производственных и торговых процессов, а также характером зависимости между элементами рассматриваемой системы. Так, большинство моделей ценообразования учитывают ответную реакцию покупателей на изменение цены. Связь между спросом на товар и его ценой для потребителей называется собственной ценовой эластичностью спроса – процент изменения проданного количества при увеличении цены на 1%. Собственная ценовая эластичность спроса обычно отрицательна, поскольку спрос почти всегда уменьшается при росте цен. Однако величина эластичности для разных продуктов может быть больше или меньше в зависимости от наличия заменителей, степени необходимости продукта для покупателей, доходов потребителей. Например, коэффициент эластичности для кондитерских изделий будет более высоким по сравнению с его значением для хлеба [1]. Основная проблема при прогнозировании спроса заключается в том, что набор вариации цен как правило ограничен. Последующее увеличение цены после её снижения может быть воспринято негативно покупателями и расцениваться как переплата и упущенная выгода. Это лишает возможности гибко устанавливать цены и следить за изменением спроса.

Для расчета прибыли или выручки необходимо выполнить прогнозирование спроса при заданной цене. Выбор модели прогнозирования зависит от характера спроса: сезонность (зависимость от времени года, от дня недели и т.д.), регулярность (как часто возникает необходимость в продуктах) и т.д. В существующих исследованиях рассматривается прогнозирование спроса на автомобили [2], дизайнерскую одежду [3], аксессуары [4] и т.д. Среди методов прогнозирования спроса чаще всего встречаются регрессионные модели: линейная [5], степенная [6], логарифмическая [5], логистическая [7–11], а также их комбинации с другими методами, например, с решающими деревьями [12]. В статье [6] учитывается объем выделенного места на полке магазина, в статье [13] – уровень конкуренции между двумя продавцами.

Задача оптимизация цены также может быть связана с такими задачами как оптимизация ассортимента, закупок, запасов предприятия.

Представленная работа посвящена разработке метода на основе обратных вычислений для решения задачи формирования цены при ограниченном объеме доставки (аналогичное ограничение встречается при заданном объеме пространства, выделенного под размещение товаров в магазине), который является более простым в компьютерной реализации по сравнению с существующими методами нелинейной оптимизации (метод штрафов, множителей Лагранжа). При этом предполагается линейная зависимость спроса от цены, параметры линейной регрессии для определения прогнозного значения еженедельного спроса определяются на основе имеющихся статистических данных о значениях цен и спроса за предыдущие периоды. Классическим методом оценки параметров регрессии является метод наименьших квадратов.

Исходными данными для определения цены p_i на изделие i-го вида $i=1,...,n$, n – число наименований товаров) являются:

- a_i и b_i – параметры линейной регрессии, используемые для определения спроса v_i на изделие i–го вида:
$$v_i = a_i + b_i \cdot p_i .$$
- c_i – себестоимость изделия i-го вида;
- h_i – объем единицы изделия i-го вида;
- S – объем доставки.

Необходимо определить такие значения цен p_i, которые бы обеспечили максимальное значение прибыли при ограниченном объеме поставки.

Полученная задача представляет собой задачу квадратичного программирования с линейным ограничением в виде равенства:

$$f(p) = -\sum_{i=1}^{n}\left(a_i + b_i \cdot p_i\right)\left(p_i - c_i\right) \to \min ,$$
$$h(p) = \sum_{i=1}^{n} h_i v_i = \sum_{i=1}^{n} h_i\left(a_i + b_i p_i\right) = S, \tag{1}$$
$$p_i \ge 0$$

Решение задачи может быть выполнено с помощью классических методов: штрафов и множителей Лагранжа. Однако данные методы являются трудоемкими в компьютерной реализации. Метод штрафов требует многократного решения задачи безусловной оптимизации с различными значениями штрафного параметра. Метод множителей Лагранжа подразумевает формирование функции Лагранжа, приравнивание к нулю её частных производных и определения множителя Лагранжа путем его выражения из полученной системы уравнений. С помощью полученного значения множителя Лагранжа определяются величины аргументов функции.

Метод решения задачи оптимизации цены на основе обратных вычислений. Под решением задач с помощью обратных вычислений [14] понимают нахождение приращений аргументов функции на основе следующей информации: начальные значения аргументов и функции, новое значение функции, коэффициенты относительной важности аргументов, направление изменений аргументов. Задача представляется в виде системы уравнений, включающей выражения для отношений приращений и уравнение для исходной функции. Если необходимо определить новое значение функции таким образом, чтобы сумма квадратов приращений аргументов была минимальна [15], то в этом случае отсутствует необходимость использования экспертной информации. Решение такой задачи рассмотрено в работе [15], где определены выражения для аддитивной, мультипликативной и кратной зависимости между аргументами, полученные в том числе с помощью геометрических построений. Рассмотрим применение данного подхода для рассматриваемой задачи (1). Тогда решение задачи будет включать два основных этапа: решение задачи безусловной оптимизации и последующая корректировка полученного решения с учетом ограничения таким образом, чтобы сумма квадратов приращений аргументов была минимальна при условии влияния отдельных аргументов на изменение целевой функции. Рассмотрим шаги алгоритма более подробно.

Шаг 1. Решение задачи безусловной оптимизации: определение точки минимума целевой функции $f(p)$.
Шаг 2. Вычисление отношений $d_{i,j}$ частных производных второго порядка целевой функции (j – индекс переменной, используемой в качестве базовой, k_i – значение частной производной второго порядка по переменной p_i, i=1..n, $i \neq j$, n – число переменных):

$$d_{i,j} = \frac{k_i}{kj}.$$

Шаг 3. Вычисление отношений $r_{i,j}$ коэффициентов при аргументах в ограничении:

$$r_{i,j} = \frac{h_i b_i}{h_j b_j}.$$

Шаг 4. Решение системы уравнений (её формирование для аддитивной зависимости, которая присутствует в ограничении, рассмотрено в работах [15,16]):

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta p_i}{\Delta p_j} \cdot d_{i,j} = r_{i,j}, i = 1..n, i \neq j; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} h_i (a_i + b_i (p_i + \Delta p_i)) = S. \end{cases}$$

Пример решения задачи моделирования

Исходные данные задачи представлены в Таблице 1. Объем доставки составляет 20 куб.м.

Таблица 1. Исходные данные

Показатель	Номер изделия, i				
	1	2	3	4	5
Параметр линейной регрессии a	2600	3200	2000	3000	2300
Параметр линейной регрессии b	-6	-5	-7	-8	-4
Себестоимость единицы изделия, руб.	100	150	70	90	80
Объем единицы изделия, куб.м.	0,2	0,4	0,5	0,25	0,6

Подставим значения в (1) получим:

$$f(p) = -((2600-6\cdot p_1)\cdot(p_1-100)+(3200-5\cdot p_2)\cdot(p_2-150)+(2000-7\cdot p_3)\cdot$$
$$(p_3-70)+(3000-8\cdot p_3)\cdot(p_3-90)+(2300-4\cdot p_3)\cdot(p_3-80))\to\min$$
$$0,2(2600-6\cdot p_1)+0,4(3200-5\cdot p_2)+0,5(2000-7\cdot p_3)+0,25(3000-8\cdot p_3)+$$
$$0,6(2300-4\cdot p_3)=20.$$

Решение задачи безусловной оптимизации:

p_1=266,67 руб., p_2=395, p_3=177,86 , p_4=232,5, p_5= 327,5 (руб.).

Вторые производные целевой функции равны:

$$\frac{\partial^2 f(p)}{\partial p_1^2}=12,\ \frac{\partial^2 f(p)}{\partial p_2^2}=10,\ \frac{\partial^2 f(p)}{\partial p_3^2}=14,\ \frac{\partial^2 f(p)}{\partial p_4^2}=16,\ \frac{\partial^2 f(p)}{\partial p_5^2}=8.$$

Таким образом, система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta p_1}{\Delta p_2} \cdot \dfrac{12}{10} = \dfrac{-1,2}{-2}; \\ \dfrac{\Delta p_1}{\Delta p_3} \cdot \dfrac{12}{14} = \dfrac{-1,2}{-3,5}; \\ \dfrac{\Delta p_1}{\Delta p_4} \cdot \dfrac{12}{16} = \dfrac{-1,2}{-2}; \\ \dfrac{\Delta p_1}{\Delta p_5} \cdot \dfrac{12}{8} = \dfrac{-1,2}{-2,4}; \\ 0,2\big(2600 - 6\cdot(266,67 + \Delta p_1)\big) + 0,4\big(3200 - 5\cdot(395 + \Delta p_2)\big) + 0,5\cdot \\ \big(2000 - 7\cdot(177,86 + \Delta p_3)\big) + 0,25\big(3000 - 8\cdot(232,5 + \Delta p_4)\big) + 0,6\cdot \\ \big(2300 - 4\cdot(327,5 + \Delta p_5)\big) = 20. \end{cases}$$

Решением системы уравнений будут значения приращений аргументов: Δp_1=81,46, Δp_2=162,92, Δp_3=203,65, Δp_4=101,82, Δp_5=244,38. Тогда решением задачи будут следующие значения аргументов: $p_i^* = p_i + \Delta p_i$: $p_1 = 348{,}13, p_2 = 557{,}92, p_3 = 381{,}5, p_4 = 334{,}32, p_5 = 571{,}88$ (руб.).

На Рисунке 1 представлено решение задачи оптимизации (1) в MathCad, которое соответствует полученному с помощью обратных вычислений.

В Таблице 2 представлен результат решения рассматриваемой задачи с помощью метода штрафов (использован квадратичный штраф).

Таблица 2. Решение, полученное с помощью метода штрафов

Штрафной параметр R	Аргументы функции					Ограничение $h(p)$	Целевая функция $f(x)$
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5		
0	266,67	395	177,86	232,5	327,5	1947	-955699
100	347,95	557,57	381,07	334,11	571,36	24	-174354
1000	348,11	557,88	381,46	334,3	571,83	20,41	-171378
10000	348,12	557,91	381,5	334,32	571,87	20,04	-171080
100000	348,12	557,92	381,5	334,32	571,88	20	-171050

$ORIGIN := 1$

$a_1 := 2600 \quad a_2 := 3200 \quad a_3 := 2000 \quad a_4 := 3000 \quad a_5 := 2300$

$b_1 := -6 \quad b_2 := -5 \quad b_3 := -7 \quad b_4 := -8 \quad b_5 := -4$

$c_1 := 100 \quad c_2 := 150 \quad c_3 := 70 \quad c_4 := 90 \quad c_5 := 80$

$h_1 := 0.2 \quad h_2 := 0.4 \quad h_3 := 0.5 \quad h_4 := 0.25 \quad h_5 := 0.6$

$$f(p) := -\left[\sum_{i=1}^{5}\left[\left(a_i + b_i \cdot p_i\right)\cdot\left(p_i - c_i\right)\right]\right]$$

$p_5 := 0$

Given

$$\sum_{i=1}^{5}\left[h_i\cdot\left(a_i + b_i \cdot p_i\right)\right] = 20$$

$x := \mathrm{Minimize}(f, p)$

$$x = \begin{pmatrix} 348.13 \\ 557.92 \\ 381.5 \\ 334.32 \\ 571.88 \end{pmatrix}$$

Рисунок 1 - Решение задачи в MathCad

Заключение. В статье рассмотрено решение задачи оптимизации цены с помощью предложенного метода на основе обратных вычислений. Метод с использованием обратных вычислений является более простым в компьютерной реализации по сравнению с существующими методами нелинейной оптимизации и основан на безусловной оптимизации целевой функции и решении системы уравнений. В работе рассмотрено решение задачи при линейной зависимости спроса от цены и наличии ограничения на объем поставки товара. Полученное решение соответствует решению задачи в программе MathCad с использованием встроенной функций. Предложенный метод на основе обратных вычислений может быть использован в системах поддержки принятия решений для планирования ценовой политики организации. Кроме того, представленный метод может быть применен и для решения других оптимизационных задач квадратичного программирования представленного вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Green R., Cornelsen L., Dangour A., Turner R., Shankar B., Mazzocch M., Smith R. The effect of rising food prices on food consumption: systematic review with meta-regression. BMJ, vol. 346, 2013, pp. 1–9.
2. Noparumpa T., Kazaz B., Webste S. Wine futures and advance selling under quality uncertainty. Manufacturing & service operations management, vol. 3, 2015, pp. 411–426.
3. Berry S., Levinsohn J., Pakes A. Automobile prices in market equilibrium steven. Econometrica, vol. 63, 2007, pp. 841–890.
4. Johnson K., Hong B., Lee A., Simchi-levi D. Analytics for an online retailer: demand forecasting and price optimization. Manufacturing & Service Operations Management, vol. 18, 2016, pp. 69–85.
5. Kunz T., Crone S., Meissner J. The effect of data preprocessing on a retail price optimization system. Decision Support Systems, vol.84, 2016, pp. 16–27.
6. Reisi M., Gabriel S.A., Fahimnia B. Supply chain competition on shelf space and pricing for soft drinks: A bilevel optimization approach. International journal of production economics, vol. 211, 2019, pp. 237–250.
7. Theysohn S., Klein K., Volckner F, Spann M. Dual effect-based market segmentation and price optimization. Journal of business research, vol. 66, 2013, pp. 480–488.
8. Krasheninnikova E., Garcia J., Maestre R., Fernandez F. Reinforcement learning for pricing strategy optimization in the insurance industry. Engineering applications of artificial intelligence, vol.80, 2019, pp.8–19.
9. Gupta V.K., Ting Q.U., Tiwari M.K. Multi-period price optimization problem for omnichannel retailers accounting for customer heterogeneity. International journal of production economics, vol. 215, 2019, pp. 155–167.
10. Chen R., Jiang H. Capacitated assortment and price optimization for customers with disjoint consideration sets. Operations Research Letters, vol. 45, 2017, pp. 170–174.
11. Chen R., Jiang H. Capacitated assortment and price optimization under the multilevel nested logit model. Operations Research Letters, vol. 47, 2019, pp. 30–35.
12. Qu T., Zhang J. H., Chan F., Srivastava R.S., Tiwari M.K., Park W. Demand prediction and price optimization for semi-luxury supermarket segment. Computers & industrial engineering, vol. 113, 2017, pp. 91–102.
13. Tsan-Ming C., Cheng M., Bin S., Qi S. Optimal pricing in mass customization supply chains with risk-averse agents and retail competition. Omega, vol. 88, 2019, pp. 150–161.
14. Одинцов Б.Е. Обратные вычисления в формировании экономических решений. М.: Финансы и статистика, 2004. 256 с.

15. Грибанова Е.Б. Методы решения обратных задач экономического анализа с помощью минимизации приращений аргументов // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2018. – №2. – С. 95–99.
16. Грибанова Е.Б. Решение задачи оптимизации закупок с помощью обратных вычислений // Экономический анализ: теория и практика. – 2018. – №3. – С. 586–596.

E.B. Gribanova

SOLVING THE PROBLEM OF PRICE OPTIMIZATION USING INVERSE CALCULATIONS

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russia

The relevance of the study is due to the high impact of price policy on the efficiency of the enterprise. The article presents a description of the method based on inverse calculations to solve the problem of price optimization. The method involves solving the problem of unconditional optimization and correction of the obtained values of the arguments taking into account the restriction. This minimizes the sum of the squares of the argument increments, taking into account the effect of the arguments on the change of the objective function. The method is more straightforward in computer implementation, in comparison with the classical methods of nonlinear optimization, optimization problem the price is reduced to unconstrained optimization and the solution of the system of equations. The article deals with the problem of formation of prices for products while maximizing profits from the sale of products and limited supply. This assumes a linear dependence of demand on price. A comparison of the obtained result with the solution of the problem in the Mathcad program using standard functions is presented. The materials of the article are of practical value for organizations in the planning of pricing policy, as well as for specialists engaged in the development of models for decision-making in the field of Economics. The presented method can be used in decision support systems.

Keywords: price optimization, inverse calculation, quadratic programming, demand forecasting

REFERENCES

1. Green R., Cornelsen L., Dangour A., Turner R., Shankar B., Mazzocch M., Smith R. The effect of rising food prices on food consumption: systematic review with meta-regression. BMJ, vol. 346, 2013, pp. 1–9.
2. Noparumpa T., Kazaz B., Webste S. Wine futures and advance selling under quality uncertainty. Manufacturing & service operations management, vol. 3, 2015, pp. 411–426.
3. Berry S., Levinsohn J., Pakes A. Automobile prices in market equilibrium steven. Econometrica, vol. 63, 2007, pp. 841–890.

4. Johnson K., Hong B., Lee A., Simchi-levi D. Analytics for an online retailer: demand forecasting and price optimization. Manufacturing & Service Operations Management, vol. 18, 2016, pp. 69–85.
5. Kunz T., Crone S., Meissner J. The effect of data preprocessing on a retail price optimization system. Decision Support Systems, vol.84, 2016, pp. 16–27.
6. Reisi M., Gabriel S.A., Fahimnia B. Supply chain competition on shelf space and pricing for soft drinks: A bilevel optimization approach. International journal of production economics, vol. 211, 2019, pp. 237–250.
7. Theysohn S., Klein K., Volckner F, Spann M. Dual effect-based market segmentation and price optimization. Journal of business research, vol. 66, 2013, pp. 480–488.
8. Krasheninnikova E., Garcia J., Maestre R., Fernandez F. Reinforcement learning for pricing strategy optimization in the insurance industry. Engineering applications of artificial intelligence, vol.80, 2019, pp.8–19.
9. Gupta V.K., Ting Q.U., Tiwari M.K. Multi-period price optimization problem for omnichannel retailers accounting for customer heterogeneity. International journal of production economics, vol. 215, 2019, pp. 155–167.
10. Chen R., Jiang H. Capacitated assortment and price optimization for customers with disjoint consideration sets. Operations Research Letters, vol. 45, 2017, pp. 170–174.
11. Chen R., Jiang H. Capacitated assortment and price optimization under the multilevel nested logit model. Operations Research Letters, vol. 47, 2019, pp. 30–35.
12. Qu T., Zhang J. H., Chan F., Srivastava R.S., Tiwari M.K., Park W. Demand prediction and price optimization for semi-luxury supermarket segment. Computers & industrial engineering, vol. 113, 2017, pp. 91–102.
13. Tsan-Ming C., Cheng M., Bin S., Qi S. Optimal pricing in mass customization supply chains with risk-averse agents and retail competition. Omega, vol. 88, 2019, pp. 150–161.
14. Odincov B.E. Obratnye vychislenija v formirovanii jeko-nomicheskih reshenij. Moscow, Finansy i statistika Publ., 2004. 256 p.
15. Gribanova E.B. Methods for solving inverse problems of economic analysis by minimizing argument increments. Bulletin of TUSUR, 2018, no. 2, pp. 95–99.
16. Gribanova E.B. Solving the procurement optimization problem by means of inverse computation. Economic analysis: theory and practice, 2018, no. 3, pp. 586–596.