УДК 519.873, 004.056 DOI: 10.26102/2310-6018/2019.26.3.021

И.И. Вайнштейн, В.И. Вайнштейн

# ДИСПЕРСИЯ ЧИСЛА ОТКАЗОВ В МОДЕЛЯХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

*ФГАО ВО «Сибирский федеральный университет», Красноярск, Россия*

*В работе для ряда моделей процессов восстановления получены формулы дисперсии числа отказов, зависящие как от функций восстановления рассматриваемой модели процесса восстановления, так и от функций восстановления (среднего числа отказов) других моделей. С учетом формул для среднего и дисперсии числа отказов даны постановки задач об организации процесса восстановления, в котором достигается минимальная дисперсия при задаваемом ограничении на среднее число отказов или, чтобы было наименьшее среднее число отказов при задаваемом ограничении на дисперсию. Задачи по формулировке напоминают известную задачу Марковица о формировании портфеля ценных бумаг, где среднее имеет смысл дохода, дисперсия риска. Получено решение сформулированных задач для простого процесса восстановления при экспоненциальном распределении наработок, и для этого случая выписано неравенство Чебышева и формула для коэффициента вариации. Разработанный математический аппарат предназначен для применения при постановке и решении различных оптимизационных задач информационной и компьютерной безопасности, а так же при эксплуатации технических и информационных систем, программных и программно-аппаратных средств защиты информации, когда возникают отказы, угрозы атак, угрозы безопасности, имеющие случайный характер.*

**Ключевые слова:** функция распределения, процесс восстановления, функция восстановления, дисперсия числа отказов, коэффициент вариации.

**Введение. Постановка задачи.** Теория восстановления моделирует ситуацию, когда после каждого отказа элементов технических и информационных систем, а также программных и программно-аппаратных средств защиты информации в процессе восстановления элемент ремонтируется или заменяется на новый – элемент восстанавливается.

Таким образом, после первого отказа (имеем $X_1$ – наработку до первого отказа) элемент восстанавливается и работает до следующего отказа (имеем $X_2$ – наработку от первого до второго отказа), затем он опять восстанавливается и т.д. Получаем последовательность случайных величин (наработок) $X_i,\ i = 1,2,\ldots$. Пусть $F_i(t)$ – их функции распределения.

Последовательность неотрицательных независимых случайных величин $X_i$ с функциями распределения $F_i(t)$ называется процессом восстановления [1-3].

Функции распределения случайных величин, задающих процесс восстановления, могут не совпадать. Предположения о функциях распределения приводят к различным математическим моделям процессов восстановления [2-6].

Если функции распределения $F_i(t)$. совпадают ($F_i(t) = F_1(t)$), имеем простой (обычный) процесс восстановления. Если функции распределения $F_i(t)$ совпадают начиная с номера $i = 2$ ($F_i(t) = F_2(t), i \geq 2$) имеем общий (запаздывающий) процесс восстановления.

Если функции распределения $F_i(t)$ совпадают начиная с номера $k$ ($F_i(t) = F_k(t), i \geq k$), имеем процесс восстановления k-го порядка). При $k = 1$ имеем простой процесс восстановления, при $k = 2$ – общий.

Если функции распределения $F_i(t)$ удовлетворяют условию

$$F_i(t) = F_j(t) \text{ при } i \equiv j (\operatorname{mod} k)$$

имеем периодический процесс восстановления k-го порядка.

Числа $i, j$ сравнимы по модулю натурального числа $k$ ($i \equiv j(mod\, k)$), если при делении на $k$ они дают одинаковые остатки. Число $k$ называется модулем сравнения.

При $k = 3$ последовательность функций распределения периодического процесса имеет вид:

$$\underbrace{F_1, F_2, F_3}, \underbrace{F_1, F_2, F_3}, \ldots$$

Этот случай можно интерпретировать как процесс восстановления, при котором наряду со временем работы элемента до отказа учитывается время определения причины отказа и время восстановления. Другая интерпретация: после каждого третьего отказа система возвращается в первоначальное состояние.

Обобщением вышеуказанных процессов является процесс восстановления порядка $(k_1, k_2)$.

У процесса восстановления порядка $(k_1, k_2)$ функции распределения удовлетворяют условию

$$F_i(t) = F_j(t) \quad \text{при } i \equiv j \ (\operatorname{mod} k_2), i, j \geq k_1.$$

При процессе восстановления порядка $(k_1, k_2)$ после первых $k_1 - 1$ восстановлений начинается периодический процесс порядка $k_2$.

При $k_1 = 1$ имеем периодический процесс восстановления порядка $k_2$, при $k_2 = 1$ имеем процесс восстановления порядка $k_1$.

Последовательность функций распределения для процесса восстановления порядка (2,2) имеет вид

$$F_1, \underbrace{F_2, F_3}, \underbrace{F_2, F_3}, \underbrace{F_2, F_3}, \ldots.$$

Этот случай можно интерпретировать как процесс, когда после первого восстановления система через каждые два восстановления возвращается в состояние, в котором находилась после первого восстановления.

Процесс восстановления задает случайную величину $N(t)$ – количество отказов (восстановлений) за время от 0 до $t$, которая характеризуется математическим ожиданием и дисперсией. Так

$$P(N(t)=n)=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t), \tag{1}$$

$F^{(n)}(t)$– $n$-кратная свертка функций распределения $F_i(t), (i=1,2,\dots,n)$

$$F^{(n)}(t)=(F^{(n-1)}*F_n)(t)=\int_0^t F^{(n-1)}(t-x)dF_n(x), F^{(1)}(t)=F_1(t).$$

В теории надежности математическое ожидание числа отказов (среднее число отказов) называют функцией восстановления $H(t)$ и

$$H(t)=E(N(t))=\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(t). \tag{2}$$

Для указанных моделей имеются интегральные уравнения для нахождения функции восстановления, а также интегральные представления функций восстановления через функции восстановления соответствующим этим моделям простых процессов восстановления [2-4].

Например, пусть $HF_1(t)$ функция восстановления простого процесса, образованного функцией распределения $F_1(t)$, $HF_1F_2(t)$ функция восстановления общего процесса, образованного первой функцией распределения $F_1(t)$, второй и следующими $F_2(t)$. Функции $HF_1(t)$, $HF_1F_2(t)$ связаны соотношениями

$$HF_1(t)=F_1(t)+\int_0^t H\,F_1(t-x)dF_1(x),$$

$$HF_1F_2(t)=F_1(t)+\int_0^t H\,F_2(t-x)dF_1(x).$$

Для многих известных законов распределения, например, экспоненциального, Вейбулла–Гнеденко, Эрланга, нормального, Максвелла, Релея, гамма-распределения и их смесей функция восстановления получена в явном виде или выписана в виде степенных рядов [2, 3, 7].

Цель дальнейшего – получение формул для дисперсии числа отказов в рассмотренных выше процессах восстановления и постановке оптимизационных задач, связанных с средним и дисперсией числа отказов при эксплуатации элементов технических и информационных систем, а также программных и программно-аппаратных средств защиты информации.

**Дисперсия числа отказов в моделях процесса восстановления.** Пусть $D(N(t))$ дисперсия числа отказов за время от 0 до $t$.
Для дисперсии числа отказов при простом процессе формула известна [2]

$$D\big(N(t)\big) = 2\int_0^t H\,(t-x)dH(x) + H(t) - H^2(t).$$

Рассмотрим дисперсию в других моделях процесса восстановления. По определению

$$D(N(t)) = E(N^2(t)) - E^2(N(t)) = E(N^2(t)) - H^2(t).$$

Таким образом, для вычисления дисперсии наряду с функцией восстановления требуется вычисление $E(N^2(t))$. Учитывая (1),(2), получаем

$$H(N^2(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\,P(N(t)=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\,(F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t)) =$$

$$= F_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty}(\,n^2 - (n-1)^2)F^{(n)}(t) = F_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty}(\,2n-1)F^{(n)}(t) =$$

$$= -H(t) + 2F_1(t) + 2\sum_{n=2}^{\infty} n\,F^{(n)}(t) = -H(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\,F^{(n)}(t).$$

Таким образом, задача сводится к вычислению для каждой модели процесса восстановления суммы $\sum_{n=1}^{\infty} n\,F^{(n)}(t)$. В дальнейшем при вычислении этой суммы будет использована формула (2) функции восстановления и свойства функций распределения, задающих рассматриваемые модели.

**Общий процесс восстановления.** Последовательно получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,F^{(n)}(t) = (F_1(t) + (F_1 * F_2)(t) + (F_1 * F_2^{(2)})(t) + \cdots$$
$$+(F_1 * F_2^{(n-1)})(t) + \cdots) + ((F_1 * F_2)(t) + (F_1 * F_2^{(2)})(t) +$$
$$+(F_1 * F_2^{(3)})(t) + \ldots + (F_1 * F_2^{(n-1)})(t) + \ldots) +$$
$$+((F_1 * F_2^{(2)})(t) + (F_1 * F_2^{(3)})(t) + \ldots + (F_1 * F_2^{(n-1)})(t) + \ldots) +$$
$$+(F_1 * F_2^{(3)})(t) + \cdots + (F_1 * F_2^{(n-1)})(t) + \cdots) + \cdots + (F_1 * F_2^{(n-1)})(t) +$$
$$+(F_1 * F_2^{(n)})(t) + \cdots) = (H(t) + (F_1 * HF_2)(t) +$$
$$+(F_1 * F_2 * HF_2)(t)(F_1 * F_2 * F_2 * HF_2)(t) + \ldots + (F_1 * (F_2^{(n)} * HF_2)(t) + \ldots) =$$
$$= H(t) + (HF_2 * (F_1 + (F_1 * F_2)(t) + ((F_1 * F_2 * F_2)(t) + \cdots +$$
$$+(F_1 * F_2^{(n)})(t) + \ldots)) = H(t) + (HF_2 * H)(t).$$

Здесь $H(t) = HF_1F_2(t)$. Окончательно

$$D(N(t)) = 2\int_0^t H\,F_2(t-x)dHF_1F_2(x) + HF_1F_2(t) - (HF_1F_2(t))^2. \quad (3)$$

Пример. Выпишем дисперсии для простого и общего процесса при экспоненциальных распределениях наработок

$$F_1(t) = (1 - e^{-\alpha_1 t}), \quad F_2(t) = (1 - e^{-\alpha_2 t}), \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

При простом процессе $H(t) = \alpha_1 t$. После интегрирования в (3) $D(N(t)) = \alpha_1 t$.

При простом процессе при экспоненциальном распределении наработок дисперсия совпадает с функцией восстановления. При общем процессе [3]

$$HF_1F_2(t) = \alpha_2 t + (1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1})(1 - e^{-\alpha_1 t}).$$

После интегрирования в (3)

$$D\big(N(t)\big) = \alpha_2^2 t^2 + \frac{2\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1} t - \frac{2\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1^2}(1 - e^{-\alpha_1 t}) + \\ + HF_1F_2(t) - H^2F_1F_2(t).$$

**Процесс восстановления $\boldsymbol{k}$-го порядка ($\boldsymbol{k > 2}$).** Последовательно получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, F^{(n)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}\,(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F^{(n)}\,(t) + \sum_{n=3}^{\infty} F^{(n)}\,(t) + \ldots$$
$$+ \sum_{n=k-2}^{\infty} F^{(n)}\,(t) + \sum_{n=k-1}^{\infty} F^{(n)}\,(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\,F^{(k-1)} * F_k^{(n)})(t) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (\,(F^{(k-1)} * F_k) * F_k^{(n)})(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\,(F^{(k-1)} * F_k^{(2)}) * F_k^{(n)})(t) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (\,(F^{(k-1)} * F_k^{(3)}) * F_k^{(n)})(t) + \ldots =$$
$$= (H(t) + (-F_1(t) + H(t)) + (-F_1(t) - F^{(2)}(t) + H(t)) +$$
$$+ (-F_1(t) - F^{(2)}(t) - F^{(3)}(t) + H(t)) + \ldots +$$
$$+ (-F_1(t) - F^{(2)}(t) - F^{(3)}(t) - \ldots - F^{(k-2)}(t) + H(t)) +$$
$$+ (F^{(k-1)} * HF_k)(t) + ((F^{(k-1)} * F_k) * HF_k)(t) +$$
$$+ ((F^{(k-1)} * F_k^{(2)}) * HF_k)(t) + \ldots) =$$
$$= ((k-2)H(t) - (k-2)F_1(t) - (k-3)F^{(2)}(t) - \cdots$$
$$-2F^{(k-3)}(t) - F^{(k-2)}(t) + ((HF^{(k-1)}F_k) * HF_k)(t)) =$$
$$= (k-2)H(t) - \sum_{n=1}^{k-2} (\,k - (n+1))F^{(n)}(t) + (HF^{(k-1)}F_k * HF_k)(t).$$

Здесь $H(t)$ - функция восстановления рассматриваемого процесса $k$-го порядка [3]

$$H(t) = \sum_{n=1}^{k-1} F^{(n)}\,(t) + \int_0^t H\,F_k(t-x)dF^{(k-1)}(x).$$

Окончательно

$$D(N(t)) = 2\int_0^t H\,F^{(k-1)}F_k)(t-x)dHF_k(x) -$$
$$-H^2(t) + (2k-3)H(t) - 2\sum_{n=1}^{k-2}(\,k-(n+1))F^{(n)}(t).$$

**Периодический процесс восстановления 2-го порядка.** Последовательно получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,F^{(n)}(t) = ((F_1(t) + (F_1 * F_2)(t) + (F_1 * F_2 * F_1)(t) +$$
$$+(F_1 * F_2 * F_1 * F_2)(t) + \cdots) + ((F_1 * F_2)(t) + (F_1 * F_2 * F_1)(t) +$$
$$+(F_1 * F_2 * F_1 * F_2)(t) + \cdots) + ((F_1 * F_2 * F_1)(t) +$$
$$+((F_1 * F_2 * F_1 * F_2)(t) + (F_1 * F_2 * F_1 * F_2 * F_1)(t) + \cdots) +$$
$$+((F_1 * F_2 * F_1 * F_2)(t) + (F_1 * F_2 * F_1 * F_2 * F_1)(t) +$$
$$+(F_1 * F_2 * F_1 * F_2 * F_1 * F_2)(t) + \cdots) +$$
$$+((F_1 * F_2 * F_1 * F_2 * F_1)(t) + (F_1 * F_2 * F_1 * F_2 * F_1 * F_2)(t) +$$
$$+(F_1 * F_2 * F_1 * F_2 * F_1 * F_2 * F_1)(t) + \cdots) + \cdots) =$$
$$= H(t) + (((F_1 * F_2)(t) + (F_1 * F_2 * H_{1,2})(t)) + ((F_1 * F_2 * F_1)(t) +$$
$$+(F_1 * F_2 * F_1 * H_{2,1})(t)) + ((F_1 * F_2 * F_1 * F_2)(t) +$$
$$+((F_1 * F_2 * F_1 * F_2 * H_{1,2})(t)) + ((F_1 * F_2 * F_1 * F_2 * F_1)(t) +$$
$$+((F_1 * F_2 * F_1 * F_2 * F_1 * H_{2,1})(t)) + \cdots) =$$
$$= H(t) + ((H(F_1 * F_2)(t) + (H(F_1 * F_2) * H_{1,2})(t)) +$$
$$+(F_1 * (H(F_1 * F_2)(t) + (H(F_1 * F_2) ** H_{2,1})(t)))).$$

Здесь $H_{1,2}(t), H_{2,1}(t)$ функции восстановления периодических процессов с последовательностями функций распределения $F_1, F_2, F_1, F_2, \ldots$ и $F_2, F_1, F_2, F_1, \ldots$ соответственно, $H(F_1 * F_2)(t)$ - функция восстановления простого процесса, образованного сверткой функций $F_1(t), F_2(t)$. Далее

$$H_{2,1}(t) = F_2(t) + (F_2 * F_1)(t) + (F_2 * F_1 * F_2)(t) +$$
$$+(F_2 * F_1 * F_2 * F_1)(t) + \cdots = F_2(t) + (F_2 * (F_1(t) +$$
$$+(F_1 * F_2)(t) + (F_1 * F_2 * F_1)(t) + (F_1 * F_2 * F_1 * F_2)(t) + \cdots))(t) =$$
$$= F_2(t) + (F_2 * H_{1,2})(t).$$

Запишем выражение для дисперсии

$$D(N(t)) = 2(H(F_1 * F_2)(t) + (H(F_1 * F_2) * (H_{1,2} + F_1 +$$
$$+F_1 * H_{2,1}))(t)) + H_{1,2}(t) - H_{1,2}^2(t).$$
$$H_{2,1}(t) = F_2(t) + \left(F_2 * H_{1,2}\right)(t)$$

и [3]

$$H_{1,2}(t) = \sum_{n=1}^{2} H\,F^{(n)}F^{(2)}(t).$$

Для процесса восстановления порядка $(k_1, k_2)$ формулы для дисперсии усложняются.

**Оптимизационные задачи.** Рассмотрение в процессе восстановления совместного изменения среднего и дисперсии числа отказов в зависимости от функций распределения наработок до отказа восстанавливаемых элементов приводит к новым оптимизационным задачам при эксплуатации технических систем, а также программных и программно-аппаратных средств защиты информации.

Рассмотрим процесс эксплуатации при котором осуществляется процесс восстановления порядка $(k_1, k_2)$. Пусть имеется $n$, $n \geq k-1$ элементов для выбора при заменах до первых $k_1 - 1$ отказов с функциями распределения их наработок до отказа $F_i(t), i = 1,2, \dots, n$, а для дальнейшего проведения периодического процесса порядка $k_2$ возможность выбора элементов с функциями распределения $G_i, i = 1,2, \dots, m, m \geq k_2$ для каждого повторяющегося блока.

Заметим, что момент времени $\mathrm{t} = 0$ (начало работы) отождествляется с началом работы первого отказавшего элемента. Ясно, что среднее и дисперсия числа отказов будут зависеть от варианта выбора элементов и их порядка при заменах в реализации процесса восстановления. Всех вариантов $A_n^{k_1-1} A_m^{k_2}$, $A_l^k$ – размещение из $l$ элементов по $k, k \leq l, A_l^k = l(l-1) \dots (l-(k-1))$.

Придадим среднему числу отказов от начала эксплуатации до момента времени $t$ смысл «дохода» (отрицательного), а дисперсии – «риска». При такой интерпретации естественны, например, следующие две оптимизационные задачи, которые по постановке близки к известным задачам Марковица по выбору оптимального портфеля ценных бумаг.

Требуется определить выбор и порядок замен элементов в периоде эксплуатации, чтобы на задаваемом интервале времени от 0 до $T$ при задаваемом ограничении на среднее числе отказов дисперсия их числа принимала наименьшее значение. Или при задаваемом ограничении на дисперсию числа отказов среднее число отказов было наименьшим.

$$D(N(T)) \to min, H(T) \leq k, \quad (4)$$

$$H(T) \to min, D\big(N(T)\big) \leq d. \quad (5)$$

Задачи (4), (5) по постановке напоминают известную задачу Марковица об оптимальном формировании портфеля ценных бумаг, где среднее имеет смысл дохода, дисперсия – риска [8-10].

Рассмотрим задачу (4) для простого процесса восстановления, когда элементы в группе для выбора распределены по экспоненциальному закону $F_i(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}, i = 1, \dots, n$. В этом случае, учитывая рассмотренный в работе пример, $H_i(T) = \alpha_i T, D_i(N_i(T)) = \alpha_i T$. Отсюда $min\, D(N(T)) = \alpha_l T, \alpha_l = min(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Теперь, чтобы удовлетворить второму условию в (4) необходимо выполнение условия $\alpha_l T \leq k$.

Аналогично в задаче (5) $min\ H(T) = \alpha_l T$ при условии $\alpha_l T \leq d$.

Видим, что задачи (4), (5) в рассматриваемом случае могут не иметь решения. Здесь следует отметить, что выполнение этих ограничений можно достичь за счет уменьшения величины $T$.

В общем случае для разных законов распределения решение поставленных задач представляет самостоятельный интерес.

Знание формул для среднего и дисперсии числа отказов в моделях процессов восстановления дает возможность рассматривать различные теоретические и прикладные задачи теории надежности, связанные с формулой Чебышева. Для случайной величины числа отказов в процессе восстановления она записывается в виде

$$P(|N(t) - H(t)| \geq \epsilon) \leq \frac{D\big(N(t)\big)}{\epsilon^2}. \qquad (6)$$

В случае простого процесса восстановления при экспоненциальном распределении наработок ($F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$)

$$P(|N(t) - \alpha t| \geq \epsilon) \leq \frac{\alpha t}{\epsilon^2}.$$

Если в задачах (4), (5) решаются оптимизационные задачи, связанные со средним числом и дисперсией числа отказов, то формула Чебышева позволяет решать задачи о оценке вероятности отклонения числа отказов от среднего числа отказов через дисперсию числа отказов на произвольном промежутке времени от начала процесса восстановления.

Положив в (6) $\epsilon = 3\sqrt{D(N(t))}$ и переходя к противоположному событию, получаем известную форму неравенства Чебышева, которая для процесса восстановления принимает вид

$$P\left(|N(t) - H(t)| < 3\sqrt{D\big(N(t)\big)}\right) \geq \frac{8}{9}.$$

Для простого процесса восстановления при экспоненциальном распределении наработок

$$P(|N(t) - \alpha t| < 3\sqrt{\alpha t}) \geq \frac{8}{9}.$$

Отметим еще, что знание формул для среднего и дисперсии числа отказов в моделях процессов восстановления дает возможность вычислять такую важную характеристику числа отказов на промежутке от 0 до момента времени $t$, как коэффициент вариации

$$V(t) = \frac{\sigma\big(N(t)\big)}{H(t)} 100\%,$$

$\sigma(N(t))$ – среднее квадратическое отклонение, $\sigma(N(t)) = \sqrt{D(N(t))}$.

Он служит мерой относительного разброса числа отказов. Ему можно придать смысл, который показывает, какую долю «отрицательного дохода» составляет возникающий при этом «риск».

Для простого процесса восстановления при экспоненциальном распределении наработок

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha t}} 100\%.$$

Отсюда следует, что значение коэффициента вариации у величины отказов уменьшается при увеличении времени эксплуатации.

**Заключение.** При работе технических и информационных систем, а также программных и программно-аппаратных средств защиты информации происходят отказы, возникают угрозы атак, угрозы безопасности и множество других воздействий, имеющих случайный характер, которые оказывают негативное влияние на их работу. Такие воздействия приводят к процессам восстановления. Число отказов, угроз атак и угроз надежности являются случайными величинами, зависящими от времени и от их функций распределения. Характер изменения этих функций распределения приводит к различным моделям процессов восстановления для которых разработаны методы нахождения математического ожидания (функции восстановления) числа отказов.

В работе для ряда моделей процессов восстановления получены формулы дисперсии числа отказов, которые зависят как от функции восстановления рассматриваемой модели процесса восстановления, так и от функций восстановления других моделей.

Наличие формул для среднего и дисперсии числа отказов, и рассмотрение в процессе восстановления совместного изменения среднего и дисперсии числа отказов от функций распределения наработок до отказа восстанавливаемых элементов естественным образом приводит к рассмотрению в работе ряда новых оптимизационных задач в процессах восстановления. Приведено их решение для простого процесса при экспоненциальном распределении наработок заменяемых элементов при отказах. Для других моделей процессов восстановления с другими функциями распределения наработок, решение поставленных задач представляет самостоятельный интерес.

Сформулированные в работе задачи по оптимизации соотношений между средним и дисперсией числа отказов в процессах восстановления по формулировке напоминают известную задачу Марковица об оптимальном формировании портфеля ценных бумаг, где среднее имеет смысл дохода, дисперсия - риска. При проектировании и эксплуатации среднему числу отказов можно придать смысл «отрицательный доход», а величине дисперсии - «риск». Такой подход приводит еще и к другим оптимизационным задачам, например, если средней стоимости восстановлений при отказах так же придать смысл «отрицательного дохода», а дисперсии стоимости смысл «риска».

Таким образом, разработанный математический аппарат найдет применение при постановке и решении различных оптимизационных задач информационной и компьютерной безопасности, а также при эксплуатации технических, информационных, социально-экономических, биологических и других систем, в условиях, когда возникновения отказов, имеют случайный характер.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А.А. Теория вероятностей/ А.А. Боровков. -М.: Либроком, -2009. -652 с.
2. Байхельт Ф. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход: пер. с англ./ Ф. Байхельт, П. Франкен. -М.: Радио и связь, -1988. -392 с.
3. Вайнштейн И.И. Процессы и стратегии восстановления с изменяющимися функциями распределения в теории надежности/ И.И. Вайнштейн. -Красноярск: СФУ, -2016. -189 с.
4. Вайнштейн И.И. О моделях процессов восстановления в теории надежности/ И.И. Вайнштейн, В.И. Вайнштейн, Е.А. Вейсов// Вопросы математического анализа: сб. науч. тр./ред. В. И. Половинкин. -ИПЦ КГТУ. -Красноярск. -2003. -Вып. 6. -С.78-84.
5. Вайнштейн В.И. Численное нахождение функции восстановления для одной модели процесса восстановления/ В.И. Вайнштейн, Е.А. Вейсов, О.О Шмидт//Вычислительные технологии. -Новосибирск. -2005. -№10. -С. 4-9.
6. Булинская Е.В. Асимптотическое поведение некоторых стохастических систем хранения/ Е.В. Булинская, А.И. Соколова// Современные проблемы математики и механики, -2015. -С.37-62.
7. Вайнштейн В.И. Функции восстановления при распределении наработок элементов технических систем как смесь n функций распределения//Современные наукоемкие технологии, -Москва. -2018. -№6. –С.44-49.
8. Markowits Harry M. Portfolio Selection // Journal of Finance. 1952. 7. № 1 pp. 71-91
9. Касимов Ю.Ф. Основы теории оптимального портфеля ценных бумаг/ Ю.Ф. Касимов. -М: Информационно-издательский дом «Филинъ», -1998. -144 с.
10. Бабешко Л.О. Математическое моделирование финансовой деятельности/ Л.О. Касимов. -М.: «Кио-Рус», -2013. -212 с.

I. I. Vainshtein, V. I. Vainshtein

# DISPERSION OF THE NUMBER OF FAILURES IN MODELS OF PROCESSES OF RESTORATION OF TECHNICAL AND INFORMATION SYSTEMS . OPTIMIZATION PROBLEMS

*Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia*

*In this work, for several models of recovery processes, dispersion formulas for the number of failures are obtained, depending both on the recovery functions of the considered model of the recovery process and on the recovery functions (average number of failures) of other models. Considering the formulas for the average and variance of the number of failures, the problem statements are given on the organization of the recovery process in which the minimum variance is achieved with a given limit on the average number of failures, or so that there is the smallest average number of failures with a given dispersion limit. The formulation tasks resemble Markowitz's well-known task of forming a portfolio of securities, where the average makes sense of income, risk variance. The solution of the formulated problems is obtained for a simple recovery process with an exponential distribution of operating time, and for this case the Chebyshev inequality and the formula for the coefficient of variation are written. The developed mathematical apparatus is intended for use in the formulation and solution of various optimization problems of information and computer security, as well as in the operation of technical and information systems, software and hardware-software information protection when failures, threats of attacks, and security threats of a random nature occur*

**Keywords:** distribution function, recovery process, recovery function, failure rate dispersion, coefficient of variation

## REFERENCES

1. Borovkov A.A. Teoriya veroyatnostey/ A.A. Borovkov. -M.: Librokom, -2009. -652 s.
2. Baykhel't F. Nadezhnost' i tekhnicheskoe obsluzhivanie. Matematicheskiy podkhod: per. s angl./ F. Baykhel't, P. Franken. -M.: Radio i svyaz', -1988. -392 s.
3. Vaynshteyn I.I. Protsessy i strategii vosstanovleniya s izmenyayushchimisya funktsiyami raspredeleniya v teorii nadezhnosti/ I.I. Vaynshteyn. -Krasnoyarsk: SFU, -2016. -189 s.
4. Vaynshteyn I.I. O modelyakh protsessov vosstanovleniya v teorii nadezhnosti/ I.I. Vaynshteyn, V.I. Vaynshteyn, E.A. Veysov// Voprosy matematicheskogo analiza: sb. nauch. tr./red. V. I. Polovinkin. -IPTs KGTU. Krasnoyarsk. -2003. -V. 6. -S.78-84.
5. Vaynshteyn V.I. Chislennoe nakhozhdenie funktsii vosstanovleniya dlya odnoy modeli protsessa vosstanovleniya/ V.I. Vaynshteyn, E.A. Veysov, O.O Shmidt//Vychislitel'nye tekhnologii. -Novosibirsk. -2005. -№10. -S. 4-9.
6. Bulinskaya E.V. Asimptoticheskoe povedenie nekotorykh stokhasticheskikh sistem khraneniya/ E.V. Bulinskaya, A.I. Sokolova// Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki, -2015. -C.37-62.
7. Vaynshteyn V.I. Funktsii vosstanovleniya pri raspredelenii narabotok

elementov tekhnicheskikh sistem kak smes' n funktsiy raspredeleniya//Sovremennye naukoemkie tekhnologii, -Moskva. -2018. -№6. –S.44-49.
8. Markowits Harry M. Portfolio Selection // Journal of Finance. 1952. 7. № 1 pp. 71-91
9. Kasimov Yu.F. Osnovy teorii optimal'nogo portfelya tsennykh bumag/ Yu.F. Kasimov. M: Informatsionno-izdatel'skiy dom «Filin"», -1998. -144 s.
10. Babeshko L.O. Matematicheskoe modelirovanie finansovoy deyatel'nosti/ L.O. Kasimov. -M.: «Kio-Rus», -2013. -212 s.