УДК 519.862.6 DOI: 10.26102/2310-6018/2020.28.1.015

Оценивание моделей парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства

М.П. Базилевский, Л.Н. Власенко
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский государственный университет путей сообщения», Иркутск, Российская Федерация

Резюме: Ключевой проблемой при построении регрессионной модели является выбор её структурной спецификации, т.е. состава переменных и математической формы связи между ними. Все известные на сегодняшний день спецификации регрессий основаны на том, что их неизвестные параметры представляют собой матрицы линейных операторов одномерного векторного пространства. В данной работе впервые рассмотрены модели парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства. Показано, что такие модели можно использовать для прогнозирования значений объясняемой переменной, причем, для этого исследователю не нужно задавать прогнозные значения объясняющей переменной, поскольку они последовательно определяются по модели. Для оценивания предложенных моделей сформулирована оптимизационная задача, основанная на методе наименьших квадратов с ограничениями. С помощью метода множителей Лагранжа доказано, что решение сформулированной задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Рассмотрен пример оценивания предложенных моделей по конкретным данным. В результате сумма квадратов ошибок по разработанной модели оказалась в пять раз меньше, чем сумма квадратов ошибок по классической модели парной линейной регрессии.

Ключевые слова: регрессионная модель, линейный оператор, векторное пространство, прогнозирование, метод наименьших квадратов, метод множителей Лагранжа.

Для цитирования: Базилевский М.П., Власенко Л.Н. Оценивание моделей парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2020;8(1). Доступно по: https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2020/02/BazilevskiySoavtori_1_20_1.pdf DOI: 10.26102/2310-6018/2020.28.1.015

Estimation of pair linear regression models with parameters in the form of linear operator matrices of two-dimensional vector space

M.P. Bazilevskiy, L.N. Vlasenko
Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Irkutsk State Transport University", Irkutsk, Russian Federation

Abstract: The key problem in constructing a regression model is the choice of its structural specification, i.e. the composition of the variables and the mathematical form of the relationship between them. All currently known regression specifications are based on the fact that their unknown parameters are matrices of linear operators of a one-dimensional vector space. In this paper, for the first time, linear regression models with parameters in the form of matrices of linear operators of a two-dimensional vector space are considered. It is shown that such models can be used to predict the values of the explained variable, and for this, the researcher does not need to set the predicted values of the explanatory variable, since they are sequentially determined by the model. To estimate the proposed models, an optimization problem is formulated based on the least-squares method with restrictions. Using the method of Lagrange multipliers, it is proved that solving the formulated problem reduces to solving linear algebraic equations system. An example of estimating the proposed models for specific data is considered. As a result, the error sum of squares by the developed model turned out to be five times less than the error sum of squares by the classical pair linear regression model.

Keywords: regression model, linear operator, vector space, forecasting, ordinary least squares, method of Lagrange multipliers.

For citation: Bazilevskiy M.P., Vlasenko L.N. Estimation of pair linear regression models with parameters in the form of linear operator matrices of two-dimensional vector space. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2020;8(1). Available from: https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2020/02/BazilevskiySoavtori_1_20_1.pdf DOI: 10.26102/2310-6018/2020.28.1.015 (In Russ).

Введение

Регрессионный анализ [1–3] является общепризнанным инструментом анализа данных, позволяющим исследовать влияние одной или нескольких объясняющих (независимых) переменных на объясняемую (зависимую) переменную. Ключевой проблемой при построении регрессионной модели является выбор её спецификации, т.е. состава переменных и математической формы связи между ними. Описание многих известных на сегодняшний день спецификаций можно найти в работах [4–6]. Проблеме построения специфицированных на основе функций Леонтьева двухфакторных моделей регрессии посвящена работа [7], а исследованию новой спецификации, синтезированной на базе модели парной линейной регрессии и регрессии Деминга, – работы [8,9].

Все описанные в перечисленных выше литературных источниках спецификации моделей объединены следующим общим свойством. Рассмотрим, к примеру, модель парной линейной регрессии:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \varepsilon_i, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где y_i, x_i, $i = \overline{1,n}$ – известные значения объясняемой переменной y и объясняющей переменной x; n – объем выборки; α_0, α_1 – неизвестные параметры модели; ε_i, $i = \overline{1,n}$ – ошибки аппроксимации.

Параметры α_0, α_1 в модели (1) можно интерпретировать как матрицы линейных операторов $\tilde{A}_0$ и $\tilde{A}_1$ одномерного векторного пространства. Обозначим эти матрицы $A_0 = (\alpha_0)$ и $A_1 = (\alpha_1)$ соответственно. Тогда модель (1) можно переписать в виде:

$$y_i = A_0(1) + A_1(x_i) + \varepsilon_i, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

В модели (2) с помощью матрицы A_0 осуществляется преобразование вектора с координатой 1 в вектор с координатой α_0, а помощью A_1 – вектора с координатой x_i в вектор с координатой $\alpha_1 x_i$. Возникает вопрос, а почему бы в моделях (1) или (2) использовать линейные операторы не одномерного, а многомерного векторного пространства?

Целью данной работы является исследование моделей парной линейной регрессии с неизвестными параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства.

Модели парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства

Пусть в модели (2) матрицы A_0 и A_1 являются матрицами линейных операторов двумерного векторного пространства:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & 0 \\ 0 & \alpha_{20} \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

где α_{10}, α_{20}, α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} – неизвестные параметры.

Понятно, что эти матрицы могут быть применены только для преобразования векторов с двумя компонентами в векторы того же пространства. Поэтому в новой модели требуется наблюдаемые значения переменных x и y объединить в некоторые пары. Рассмотрим, например, векторы пар соседних наблюдений объясняющей переменной x и объясняемой переменной y:

$$X_1^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ X_2^{(2)} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \ldots,\ X_{n-1}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$Y_1^{(2)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ Y_2^{(2)} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\ \ldots,\ Y_{n-1}^{(2)} = \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Введем векторы соседних ошибок аппроксимации:

$$E_1^{(2)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix},\ E_2^{(2)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix},\ \ldots,\ E_{n-1}^{(2)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{n-1} \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Тогда, по аналогии с моделью (2), введем регрессию:

$$Y_i^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & 0 \\ 0 & \alpha_{20} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} X_i^{(2)} + E_i^{(2)}, \qquad i = \overline{1, n-1}. \tag{3}$$

Будем называть выражение (3) моделью парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства. В этой модели с помощью матрицы A_0 осуществляется преобразование вектора с координатами $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ в вектор с координатами $\begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix}$, а помощью A_1 – вектора с координатами $\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix}$ в вектор с координатами $\begin{pmatrix} \alpha_{11}x_i + \alpha_{12}x_{i+1} \\ \alpha_{21}x_i + \alpha_{22}x_{i+1} \end{pmatrix}$.

Модель (3) можно представить в виде $2(n-1)$ уравнений:

$$\begin{cases} y_i = \alpha_{10} + \alpha_{11}x_i + \alpha_{12}x_{i+1} + \varepsilon_i, \\ y_{i+1} = \alpha_{20} + \alpha_{21}x_i + \alpha_{22}x_{i+1} + \varepsilon_{i+1}, \end{cases} \qquad i = \overline{1, n-1}. \tag{4}$$

Первые $(n-1)$ уравнений регрессии (4) $y_i = \alpha_{10} + \alpha_{11}x_i + \alpha_{12}x_{i+1} + \varepsilon_i$ фактически представляют собой модель распределенного лага – модель временного ряда, в которой текущие значения ряда y зависят от текущего и будущего значений ряда x. А оставшиеся $(n-1)$ уравнений $y_{i+1}=\alpha_{20}+\alpha_{21}x_i+\alpha_{22}x_{i+1}+\varepsilon_{i+1}$ представляют собой модель распределенного лага, в которой текущие значения ряда y зависят от текущего и прошлого значений ряда x.

Переписав модель (4) в виде

$$\begin{cases} y_{i+1}-\varepsilon_{i+1}=\alpha_{10}+\alpha_{11}x_{i+1}+\alpha_{12}x_{i+2}, & i=\overline{0,n-2}, \\ y_{i+1}-\varepsilon_{i+1}=\alpha_{20}+\alpha_{21}x_i+\alpha_{22}x_{i+1}, & i=\overline{1,n-1}, \end{cases}$$

получим следующие $(n-2)$ линейных ограничения на её параметры:

$$\alpha_{10}+\alpha_{11}x_{i+1}+\alpha_{12}x_{i+2}=\alpha_{20}+\alpha_{21}x_i+\alpha_{22}x_{i+1}, \qquad i=\overline{1,n-2}. \tag{5}$$

Пусть оцененная модель (4) имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{y}_i=\tilde{\alpha}_{10}+\tilde{\alpha}_{11}x_i+\tilde{\alpha}_{12}x_{i+1}, \\ \tilde{y}_{i+1}=\tilde{\alpha}_{20}+\tilde{\alpha}_{21}x_i+\tilde{\alpha}_{22}x_{i+1}, \end{cases} \qquad i=\overline{1,n-1}, \tag{6}$$

где $\tilde{\alpha}_{10}$, $\tilde{\alpha}_{20}$, $\tilde{\alpha}_{11}$, $\tilde{\alpha}_{12}$, $\tilde{\alpha}_{21}$, $\tilde{\alpha}_{22}$ – оценки параметров α_{10}, α_{20}, α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22}; $\tilde{y}_i$, $i=\overline{1,n}$ – расчетные значения переменной y.

Подставляя в уравнения (6) пары соседних наблюдений объясняющей переменной x, можно найти соответствующие пары расчетных значений переменной y.

Выразим x_{i+1} из первого уравнения модели (6):

$$x_{i+1}=\frac{\tilde{y}_i-\tilde{\alpha}_{10}-\tilde{\alpha}_{11}x_i}{\tilde{\alpha}_{12}}. \tag{7}$$

Равенство (7) означает, что если $\tilde{\alpha}_{12}\neq 0$, то, используя i-е наблюдаемое значение переменной x и i-е расчетное значение переменной y, можно найти $(i+1)$-е значение переменной x. Для него, используя второе уравнение модели (6), можно определить $(i+1)$-е расчетное значение переменной y. И данный процесс можно продолжать бесконечное число раз, получая при этом прогнозные значения переменных x и y в будущем. Достоинством такого метода прогнозирования является то, что исследователю не нужно самому задавать прогнозные значения переменной x, поскольку они последовательно определяются по модели.

Аналогично можно определять прогнозные значения переменных x и y в прошлом. Для этого выразим x_i из второго уравнения модели (6):

$$x_i=\frac{\tilde{y}_{i+1}-\tilde{\alpha}_{20}-\tilde{\alpha}_{22}x_{i+1}}{\tilde{\alpha}_{21}}. \tag{8}$$

Равенство (8) означает, что если $\tilde{\alpha}_{21}\neq 0$, то, используя $(i+1)$-е наблюдаемое значение переменной x и $(i+1)$-е расчетное значение переменной y, можно найти i-е значение переменной x. Для него, используя первое уравнение модели (6), можно определить i-е расчетное значение переменной y.

Оценивание модели

Для оценивания модели (4) будем использовать метод наименьших квадратов (МНК), состоящий в минимизации функционала:

$$F(\alpha_{10},\alpha_{20},\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{21},\alpha_{22})=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\to\min. \tag{9}$$

Из первого уравнения модели (4) $\varepsilon_1 = y_1 - \alpha_{10} - \alpha_{11}x_1 - \alpha_{12}x_2$, а из последних $(n-1)$ уравнений $\varepsilon_{i+1} = y_{i+1} - \alpha_{20} - \alpha_{21}x_i - \alpha_{22}x_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$. Поэтому функционал (9) можно переписать в виде:

$$F = \left(y_1 - \alpha_{10} - \alpha_{11}x_1 - \alpha_{12}x_2\right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(y_{i+1} - \alpha_{20} - \alpha_{21}x_i - \alpha_{22}x_{i+1}\right)^2 \to \min . \qquad (10)$$

Тогда решение задачи с целевой функцией (10) при $(n-2)$ линейных ограничениях (5) дает оценки модели (4). Получим решение этой задачи с помощью метода множителей Лагранжа [10]. Для этого составим функцию Лагранжа:

$$L\left(\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \lambda_1, ..., \lambda_{n-2}\right) = \left(y_1 - \alpha_{10} - \alpha_{11}x_1 - \alpha_{12}x_2\right)^2 +$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_{i+1} - \alpha_{20} - \alpha_{21}x_i - \alpha_{22}x_{i+1}\right)^2 +$$
$$+\sum_{i=1}^{n-2}\lambda_i\left(\alpha_{10} + \alpha_{11}x_{i+1} + \alpha_{12}x_{i+2} - \alpha_{20} - \alpha_{21}x_i - \alpha_{22}x_{i+1}\right), \qquad (11)$$

где λ_i, $i = \overline{1, n-2}$ – множители Лагранжа.

Вычислив частные производные функции (11) и приравняв их к нулю, получим систему из $(n+4)$ линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha_{10} + 2x_1\alpha_{11} + 2x_2\alpha_{12} + \sum\limits_{i=1}^{n-2}\lambda_i = 2y_1, \\ 2(n-1)\alpha_{20} + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\alpha_{21} + 2\sum\limits_{i=2}^{n}x_i\alpha_{22} - \sum\limits_{i=1}^{n-2}\lambda_i = 2\sum\limits_{i=2}^{n}y_i, \\ 2x_1\alpha_{10} + 2x_1^2\alpha_{11} + 2x_1x_2\alpha_{12} + \sum\limits_{i=1}^{n-2}x_{i+1}\lambda_i = 2x_1y_1, \\ 2x_2\alpha_{10} + 2x_1x_2\alpha_{11} + 2x_2^2\alpha_{12} + \sum\limits_{i=1}^{n-2}x_{i+2}\lambda_i = 2x_2y_1, \\ 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\alpha_{20} + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2\alpha_{21} + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}\alpha_{22} - \sum\limits_{i=1}^{n-2}x_i\lambda_i = 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_iy_{i+1}, \\ 2\sum\limits_{i=2}^{n}x_i\alpha_{20} + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}\alpha_{21} + 2\sum\limits_{i=2}^{n}x_i^2\alpha_{22} - \sum\limits_{i=1}^{n-2}x_{i+1}\lambda_i = 2\sum\limits_{i=2}^{n}x_iy_i, \\ \alpha_{10} + \alpha_{11}x_{i+1} + \alpha_{12}x_{i+2} - \alpha_{20} - \alpha_{21}x_i - \alpha_{22}x_{i+1} = 0, \qquad i = \overline{1, n-2}. \end{cases} \qquad (12)$$

Если определитель основной матрицы системы (12) отличен от нуля, то она будет иметь единственное решение.

Пример

В Таблице 1 приведена выборка по двум переменным y и x. Объем выборки равен 5.

Таблица 1. Статистические данные

i	y	x
1	5	1
2	7	2
3	8	4
4	10	7
5	12	6

По этим данным с помощью МНК была построена классическая модель парной линейной регрессии:

$$\tilde{y} = 4,5538 + 0,9615x \,. \tag{13}$$

Найденные по модели (13) расчетные значения и ошибки представлены в Таблице 2.

Таблица 2. Расчетные значения и ошибки по модели (13)

i	$\tilde{y}$	ε
1	5,5154	–0,5154
2	6,4769	0,5231
3	8,4	–0,4
4	11,2846	–1,2846
5	10,3231	1,6769

Сумма квадратов ошибок для модели (13) равна 5,1615, а коэффициент детерминации $R^2 = 0,8232$.

Затем оценивалась модель (4) парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства. Для этого была составлена система (12):

$$\begin{cases}
2\alpha_{10} + 2\alpha_{11} + 4\alpha_{12} + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 10, \\
8\alpha_{20} + 28\alpha_{21} + 38\alpha_{22} - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 74, \\
2\alpha_{10} + 2\alpha_{11} + 4\alpha_{12} + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 10, \\
4\alpha_{10} + 4\alpha_{11} + 8\alpha_{12} + 4\lambda_1 + 7\lambda_2 + 6\lambda_3 = 20, \\
28\alpha_{20} + 140\alpha_{21} + 160\alpha_{22} - \lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 294, \\
38\alpha_{20} + 160\alpha_{21} + 210\alpha_{22} - 2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 7\lambda_3 = 376, \\
\alpha_{10} - \alpha_{20} + 2\alpha_{11} + 4\alpha_{12} - \alpha_{21} - 2\alpha_{22} = 0, \\
\alpha_{10} - \alpha_{20} + 4\alpha_{11} + 7\alpha_{12} - 2\alpha_{21} - 4\alpha_{22} = 0, \\
\alpha_{10} - \alpha_{20} + 7\alpha_{11} + 6\alpha_{12} - 4\alpha_{21} - 7\alpha_{22} = 0.
\end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$\tilde{\alpha}_{10} = 4,9837\,, \qquad \tilde{\alpha}_{20} = 4,9209\,, \qquad \tilde{\alpha}_{11} = 0,807\,,$$
$$\tilde{\alpha}_{12} = -0,0628\,, \qquad \tilde{\alpha}_{21} = 0,6907\,, \qquad \tilde{\alpha}_{22} = 0,3674\,,$$
$$\lambda_1 = -2,1767\,, \qquad \lambda_2 = 0,9674\,, \qquad \lambda_3 = -0,1209\,.$$

Тогда оцененная модель (4) имеет вид

$$\tilde{Y}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4,9837 & 0 \\ 0 & 4,9209 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,807 & -0,0628 \\ 0,6907 & 0,3674 \end{pmatrix} X^{(2)}$$

или

$$\begin{cases} \tilde{y}_i = 4,9837 + 0,807 x_i - 0,0628 x_{i+1}, \\ \tilde{y}_{i+1} = 4,9209 + 0,6907 x_i + 0,3674 x_{i+1}, \end{cases} \qquad i = \overline{1,4}. \qquad (14)$$

Найденные по модели (14) расчетные значения и ошибки представлены в Таблице 3.

Таблица 3. Расчетные значения и ошибки по модели (14)

i	$\tilde{y}$	ε
1	5,6651	–0,6651
2	6,3465	0,6535
3	7,7721	0,2279
4	10,2558	–0,2558
5	11,9605	0,0395

Сумма квадратов ошибок для модели (14) равна 0,9884, что меньше той же суммы для модели (13) более чем в 5 раз.

После чего по модели (14), используя формулу (7), были найдены по два прогнозных значения переменных y и x в будущем:

$$\tilde{y}_6 = -3,4279, \qquad \tilde{x}_6 = -34,$$

$$\tilde{y}_7 = -129,8977, \qquad \tilde{x}_7 = -303,$$

и, используя формулу (8), по два прогнозных значения в прошлом:

$$\tilde{y}_0 = 5,3611, \qquad \tilde{x}_0 = 0,5454,$$

$$\tilde{y}_{-1} = 5,2296, \qquad \tilde{x}_{-1} = 0,3471.$$

Как видно по прогнозам, темпы изменения переменных по модели (14) в прошлом оказались существенно ниже, чем темпы изменения переменных в будущем.

Заключение

В данной работе предложены модели парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства. Показано, что такие модели можно использовать для прогнозирования значений объясняемой переменной, причем, для этого исследователю не нужно задавать прогнозные значения объясняющей переменной, поскольку они последовательно определяются по модели. Для оценивания предложенных моделей сформулирована оптимизационная задача, основанная на методе наименьших квадратов с ограничениями. Для решения этой задачи с помощью метода множителей Лагранжа получена система линейных уравнений. Рассмотрен пример оценивания предложенных моделей по конкретным данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kuhn M., Johnson K. Applied predictive modeling. Springer. 2018.
2. Harrell Jr., Frank E. Regression modeling strategies: with applications to linear models, logistic and ordinal regression, and survival analysis. Springer Series in Statistics. 2015.
3. Kleinbaum D.G., Kupper L.L., Nizam A., Rosenberg E.S. Applied regression analysis and other multivariable methods. Cengage Learning. 2013.
4. Носков С.И. Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. Иркутск : Облинформпечать. 1996.
5. Клейнер Г.Б. Производственные функции: Теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика. 1986.
6. Носков С.И., Базилевский М.П. Построение регрессионных моделей с использованием аппарата линейно-булевого программирования. Иркутск: ИрГУПС. 2018.
7. Базилевский М.П. МНК-оценивание параметров специфицированных на основе функций Леонтьева двухфакторных моделей регрессии. *Южно-Сибирский научный вестник*. 2019;26(2):66-70.
8. Базилевский М.П. Синтез модели парной линейной регрессии и простейшей EIV-модели. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2019;7(1):170-182.
9. Базилевский М.П. Исследование двухфакторной модели полносвязной линейной регрессии. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2019;7(2): 80-96.
10. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа. 1986.

REFERENCES

1. Kuhn M., Johnson K. Applied predictive modeling. Springer. 2018.
2. Harrell Jr., Frank E. Regression modeling strategies: with applications to linear models, logistic and ordinal regression, and survival analysis. Springer Series in Statistics. 2015.
3. Kleinbaum D.G., Kupper L.L., Nizam A., Rosenberg E.S. Applied regression analysis and other multivariable methods. Cengage Learning. 2013.
4. Noskov S.I. Tekhnologiya modelirovaniya ob"ektov s nestabil'nym funktsionirovaniem i neopredelennost'yu v dannykh. Irkutsk: RIC GP «Oblinformpechat'» Publ. 1996.
5. Kleyner G.B. Proizvodstvennye funktsii: Teoriya, metody, primenenie. Moscow: Finance and Statistics Publ. 1986.
6. Noskov S.I., Bazilevskiy M.P. Postroenie regressionnykh modeley s ispol'zovaniem apparata lineyno-bulevogo programmirovaniya. Irkutsk: IrGUPS. 2018.
7. Bazilevskiy M.P. MNK-otsenivanie parametrov spetsifitsirovannykh na osnove funktsiy Leont'eva dvukhfaktornykh modeley regressii. *Yuzhno-Sibirskiy nauchnyy vestnik*. 2019;26(2): 66-70.
8. Bazilevskiy M.P. Sintez modeli parnoy lineynoy regressii i prosteyshey EIV-modeli. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii*. 2019;7(1): 170-182.
9. Bazilevskiy M.P. Issledovanie dvukhfaktornoy modeli polnosvyaznoy lineynoy regressii. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii*. 2019;7(2): 80-96.
10. Akulich I.L. Matematicheskoe programmirovanie v primerakh i zadachakh. Moscow: High School Publ. 1986.

ИНОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Базилевский Михаил Павлович, канд. техн. наук, доцент, кафедра математики, ФГБОУ ВО "Иркутский государственный университет путей сообщения", Иркутск, Российская Федерация.
e-mail: *mik2178@yandex.ru*
ORCID: 0000-0002-3253-5697

Mikhail P. Bazilevskiy, PhD (Tech.), Assistant Professor, Mathematics Department, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Irkutsk State Transport University", Irkutsk, Russian Federation

Власенко Любовь Николаевна, ст. преподаватель, кафедра математики, ФГБОУ ВО "Иркутский государственный университет путей сообщения", Иркутск, Российская Федерация.
e-mail: *ms.lubava.1952@mail.ru*

Lyubov' N. Vlasenko, Senior Lecturer, Mathematics Department, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Irkutsk State Transport University", Irkutsk, Russian Federation