

УДК 519.179

DOI: [10.26102/2310-6018/2020.29.2.008](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2020.29.2.008)

## Программная реализация алгоритма Дейкстры при графоструктурном моделировании организационных систем с использованием метаграфов

Н.Ю. Жбанова, А.И. Мирошников

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Липецкий государственный технический университет»,  
Липецк, Российская Федерация*

**Резюме:** С появлением социальных сетей, различных систем сбора и хранения данных и накоплением больших объемов информации графовые структуры получили очередной стимул для развития, так как одно из их основных преимуществ заключается в возможности получить компактные и понятные модели сложных систем. Графоструктурный подход является особенно продуктивным при решении задач, связанных с анализом сетей различной природы, таких как социальные сети, веб-графы, транспортные дорожные сети и другие. Такие объекты характеризуются большим объемом и сложной структурой, поэтому вопрос использования для их описания обобщенных графовых структур весьма актуален. В качестве обоснования можно выделить ряд преимуществ: сокращение размерности исходных данных без потери информации, снижение сложности интерпретации промежуточных результатов, возможность моделирования задачи на нескольких этапах и другие. Данная статья посвящена вопросам, связанным с развитием математического аппарата для построения графоструктурных моделей сложных систем. Рассматриваются обобщения понятия графа, такие как неориентированные и ориентированные гиперграфы и метаграфы. Приводится пример программной реализации иерархической системы на основе метаграфа. Данный подход позволяет варьировать степень детализации данных без их модификации при решении различных задач управления организационными системами.

**Ключевые слова:** графовые структуры, метаграфы, организационные системы, графоструктурное моделирование, алгоритм Дейкстры, конденсация графов.

**Для цитирования:** Жбанова Н.Ю., Мирошников А.И. Программная реализация алгоритма Дейкстры при графоструктурном моделировании организационных систем с использованием метаграфов. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2020;8(2). Доступно по: [https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2020/05/ZhbanovaMiroshnikov\\_2\\_20\\_1.pdf](https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2020/05/ZhbanovaMiroshnikov_2_20_1.pdf) DOI: 10.26102/2310-6018/2020.29.2.008

## Software implementation of Dijkstra's algorithm in graph-structural modeling of socio-economic systems using metagraphs

N.Y. Zhbanova, A.I. Miroshnikov

*Federal State Educational Institution of Higher Education  
"Lipetsk State Technical University", Lipetsk, Russian Federation*

**Abstract:** The developing of social networks, various data collection and storage systems and the accumulation of large amounts of information graph structures received another incentive for development. Since one of their main advantages is the ability to present compact and understandable models of complex systems. The graph-structural approach is especially productive in solving problems related to the analysis of various nature networks such as social networks, web graphs, traffic road networks and others. These objects are characterized by a large volume and complex structure so the

question of using generalized graph structures to describe them is very relevant. A number of advantages can be distinguished as a justification: reducing the dimension of the source data without losing information, reducing the complexity of interpreting intermediate results, the ability to remodel tasks at several stages and others. The article is devoted to issues related to the development of the mathematical apparatus for constructing graphostructural models of complex systems. Generalizations of the concept of a graph such as undirected and oriented hypergraphs and metagraphs are considered. An example of a software implementation of a hierarchical system based on a metagraph is given. This approach allows to vary the degree of data detail without its modification.

**Keywords:** graph structures, metagraphs, socio-economic systems, graph-structural modeling, Dijkstra's algorithm, graph condensation.

**For citation:** Zhbanova N.Yu., Miroshnikov A.I. Software implementation of Dijkstra's algorithm in graph-structural modeling of socio-economic systems using metagraphs.

*Modeling, Optimization and Information Technology*. 2020;8(2). Available from: [https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2020/05/ZhbanovaMiroshnikov\\_2\\_20\\_1.pdf](https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2020/05/ZhbanovaMiroshnikov_2_20_1.pdf) DOI: 10.26102/2310-6018/2020.29.2.008 (In Russ).

## Введение

Моделирование современных социально-экономических и технических систем в динамичных и быстро меняющихся условиях с применением стандартных методов не всегда возможно. Во многих случаях применение стандартной математической модели требует предварительной адаптации, а иногда это вообще невозможно – в сложных случаях разрабатываются специальные модели и методы анализа.

Построение моделей определенных типов организационных (одноуровневых и иерархических) систем удобно осуществлять с применением инструментов графоструктурного моделирования. Графоструктурный подход заключается в описании исследуемой системы или процессов ее эволюции в терминах теории графов.

К инструментам графоструктурного моделирования, которые в настоящее время хорошо изучены, относятся графы и оргграфы (ориентированные графы), а также математические структуры для их описания и алгоритмы для их анализа. Концепция графоструктурного моделирования, зародившаяся в середине XVIII века, характеризуется стабильным развитием и расширением сфер применения. Графам, оргграфам и связанным с ними алгоритмам посвящено значительное количество литературы, как учебной, так и научной [1, 2].

Последовательность основных понятий графоструктурного моделирования по мере усложнения структуры объектов можно описать в следующем виде: граф → оргграф → гиперграф → оргигерграф → метаграф → орметаграф ...

Метаграфы и гиперграфы представляют собой относительно новые типы графовых структур. Опубликованных работ, посвященных гиперграфам, значительно меньше, чем связанных с графами и оргграфами исследований. Из наиболее весомых работ можно отметить [3-7]. Метаграфы в научной и учебной литературе представлены слабее, однако регулярно появляются исследования, посвященные их приложениям и теоретическим аспектам. В качестве значимых работ можно отметить статьи [8-15].

При моделировании сложных иерархических систем мета- и гиперграфовыми структурами делается акцент на рассмотрении взаимосвязанных наборов элементов и взаимодействий между группами элементов. Использование мета- и гиперграфов характеризуется значительным уменьшением числа гиперребер и гипердуг по

сравнению с исходным числом дуг и ребер обыкновенного графа. Таким образом мета- и гиперграфовые представления позволяют сократить объем обрабатываемых данных без потерь исходной информации. Это преимущество определяет наиболее перспективную сферу для их применения: задачи анализа больших данных, при условии, что эти данные могут быть описаны с использованием графового представления.

### Материалы и методы

Одним из ключевых понятий теории графоструктурного моделирования является понятие носителя – может быть описана некоторыми произвольное конечное множество, которое называется порождающим множеством, или носителем.

Простейшей графовой структурой является граф. Вершины графа представляют собой подмножества носителя, состоящие из одного элемента. Ребра графа – это двухэлементные неупорядоченные подмножества носителя, то есть пары вершин (концы ребра).

Таким образом, граф  $G$  может быть формализован как объединение двух множеств:

$$G = [V, E].$$

Здесь  $V$  – множество вершин  $v_i$ ,  $E$  – множество ребер. Каждый элемент множества ребер  $e_j \in E$  представляет собой пару  $(v_i, v_j)$ . В ориентированном графе дуги (ориентированные ребра) представляют собой также двухэлементные подмножества  $(v_i, v_j)$ , но являющиеся упорядоченными. Один из элементов пары определяется как начало, а второй – как конец дуги.

Понятие гиперграфа развивает теорию графоструктурного моделирования. Вершины гиперграфа, по аналогии с графом, являются одноэлементными подмножествами носителя. Однако гиперребра гиперграфа определяются как подмножества носителя из нескольких элементов; иными словами, как неупорядоченные множества двух и более вершин.

Таким образом, формально гиперграф  $H$  может быть представлен комбинацией двух множеств:

$$H = (V, HE).$$

Здесь  $V$  и  $HE$  – множества гипервершин и гиперребер гиперграфа. Каждый элемент множества ребер  $he_j \in HE$  представляет собой неупорядоченное подмножество множества вершин  $V$ :  $(v_i, v_j)$ .

Это означает, что гиперребро в гиперграфе может соединять не две вершины, а несколько. Геометрическая интерпретация гиперграфов практически не отличается от представления обыкновенных графов. На Рисунке 1 слева представлен гиперграф с 4 ребрами,  $he_1 = (v_1, v_2, v_5, v_6)$ ,  $he_2 = (v_4, v_5, v_6, v_7)$ ,  $he_3 = (v_8)$ ,  $he_4 = (v_3, v_7)$ .

Оргигерграфы, или ориентированные гиперграфы, развивают понятие гиперграфа. Гиперребра в ориентированном гиперграфе, по аналогии с ориентированным графом, называются гипердугами  $ha_j \in HA$ . Гипердуги оргигерграфа представляют собой гиперребра с заданным направлением. Формально их можно представить в виде упорядоченных наборов вершин.

Итак, оргигерграф можно определить как пару:

$$DH = (V, HE).$$

Другими словами, множество вершин в ориентированном гиперграфе соответствует множеству вершин в ненаправленном гиперграфе. Однако гипердугу можно рассматривать не просто как множество вершин, а как путь. Такая интерпретация открывает потенциальные возможности для использования гиперграфов и оргигерграфов в прикладных задачах управления большими системами. В ряде случаев применение данных структур приводит к значительному уменьшению числа гиперребер и гипердуг по сравнению с количеством ребер и дуг обыкновенного графа, что может быть важно для решения задач управления и анализа при графоструктурном моделировании сложных систем.

Гиперграфы и оргигерграфы, как и собственно графы, могут быть определены с помощью матриц смежности, матриц инцидентности и весовых матриц.

Следующим понятием, развивающим концепцию графоструктурного моделирования, является метаграф. Вершины метаграфа, как и вершины графа, и гиперграфа, представляют собой одноэлементные подмножества носителя. Кроме этого, в состав структуры метаграфа входят метавершины и метаребра.

Метавершина метаграфа представляет собой подмножество носителя, состоящее из нескольких элементов, то есть неупорядоченное множество вершин. Метаребро представляет собой неупорядоченную пару метавершин. Определим метаграф формально.

Метаграф  $MG$  может быть задан тремя множествами  $(V, MV, ME)$ , где  $V$  является множеством вершин,  $MV$  – множеством метавершин, а  $ME$  представляет собой набор метаребер.

Метавершины метаграфа могут быть определены следующим образом:

$$MV \subseteq B(V, 1) \cup B(V, 2) \cup \dots \cup B(V, n).$$

Метаребра метаграфа могут быть определены с помощью следующей формулы:

$$ME \subseteq B((B(V, 1) \cup \dots \cup B(V, n)), 2).$$

Здесь  $B$  – функция, определяемая через число сочетаний:  $B(V, n) = C_V^n$ . Заметим, что при  $n = 2$  в результате получается множество всех возможных двухэлементных подмножеств множества  $V$ , то есть множество ребер графа.

Понятие метаграфа обобщает понятия графов и гиперграфов. В самом деле, с использованием вышеприведенной терминологии граф может быть определен как пара  $(V, E)$ , где множество ребер  $E \subseteq B(V, 2)$ . Таким образом, ребра графа могут быть представлены как метавершины, состоящие из двух элементов. Сам граф можно определить как метаграф  $MG = (V, MV, ME)$ , где  $ME = \emptyset$  и  $MV \subseteq B(V, 2)$ .

Аналогичным образом могут быть связаны понятия гиперграфа и метаграфа.

Гиперграф определяется как пара  $(V, HE)$ , где гиперребро  $HE$  определяется по формуле:

$$HE \subseteq B(V, 1) \cup \dots \cup B(V, n).$$

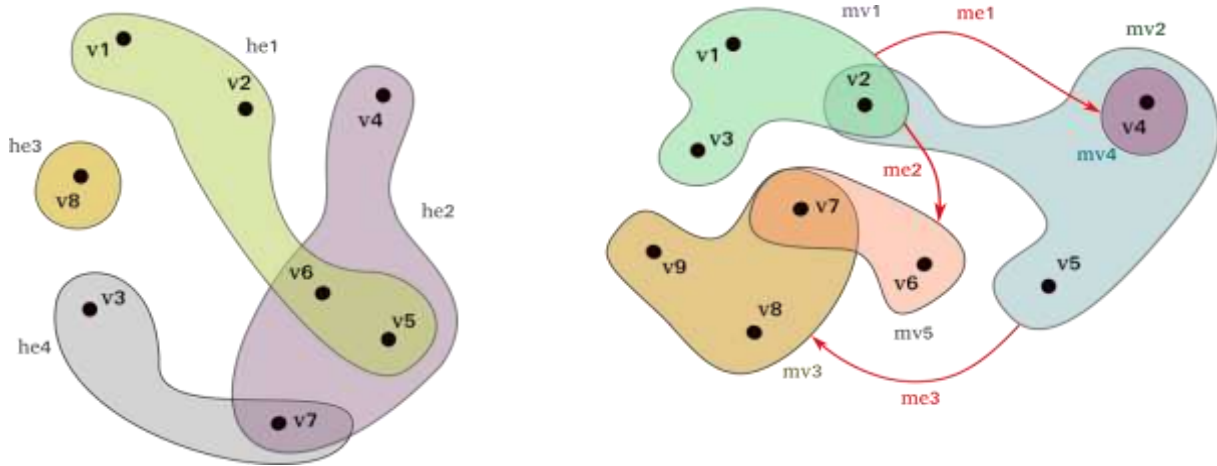


Рисунок 1 – Гиперграф (слева) и метаграф (справа)  
 Figure 1 – Hypergraph (left figure part) and metagraph (right figure part)

Любое гиперребро – это не что иное, как метавершина, а любой гиперграф может быть представлен как метаграф  $MG = (V, MV, ME)$ , где  $ME$  – пустое множество метаребер, и  $MV$  – множество метавершин, которое определяется следующим образом:

$$MV \subseteq B(V, 1) \cup \dots \cup B(V, n).$$

Приведем основные понятия матричного представления метаграфов.

Матрица смежности  $A$  для метаграфа  $MG$  представляет собой квадратную матрицу размером  $n \times n$ , где  $n$  – это количество элементов носителя. Для всех строк и столбцов  $i, j = 1, \dots, n$ , элементы матрицы смежности  $a_{ij}$  определяются по следующей формуле:

$$a_{ij} = (a_{ij})_1 \cup \dots \cup (a_{ij})_k.$$

Каждый элемент матрицы смежности  $(a_{ij})_k$  представляет собой тройку  $((mv_i)_k, (mv_j)_k, me_k)$ , если метаребро  $me_k$  соединяет метавершины  $(mv_i)_k$  и  $(mv_j)_k$ , или пустое множество во всех прочих случаях.

Матрица инцидентности метаграфа  $I$  в общем случае является прямоугольной. Строки матрицы инцидентности для метаграфа соответствуют каждому элементу носителя, столбцы соответствуют метаребрам, элементы матрицы определяются следующим соотношением:

$$i_{j,k} = \begin{cases} -1, & \text{если } v_k \in \text{INP}(me_j); \\ 1, & \text{если } v_k \in \text{OUT}(me_j); \\ \emptyset, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь  $\text{INP}(me_j)$  – множество входных вершин для гиперребра  $me_j$ ,  $\text{OUT}(me_j)$  – множество выходных вершин.

Прослеживается связь между понятиями метаграфа и конденсации ориентированного графа. Рассмотрим ориентированный граф  $G$ , определим в нем компоненты сильной связности – подмножества вершин, для любых двух элементов которых  $e_i$  и  $e_j$  существует путь как из  $e_i$  в  $e_j$ , так и из  $e_j$  в  $e_i$  (Рисунок 2, слева). В таком случае конденсация представляет собой орграф  $G'$ , вершинами которого служат компоненты сильной связности орграфа  $G$ . То есть, каждая компонента сильной связности исходного графа «стягивается» в вершину конденсации графа (Рисунок 2,

в центре). При этом дуга  $e_j$  в конденсации  $G'$  существует только в случае наличия хотя бы одной дуги между вершинами, входящими в соответствующие компоненты связности.

Конденсация графа позволяет представлять его структуру в сжатом виде. Данное свойство может быть полезным при графоструктурном моделировании социально-экономических систем с большим количеством элементов – в таком случае агрегирование информации позволяет упростить структуру модели. Однако при конденсации нескольких вершин в одну теряется информация о характере связей между ними.

Заметим, что конденсация графа может быть представлена в виде метаграфа. При этом каждая вершина конденсации будет соответствовать метавершине, а каждая дуга конденсации – метадуге метаграфа (Рисунок 2, справа). Использование метаграфов позволит применять любую степень агрегации и детализации с сохранением исходной информации о моделируемой системе.

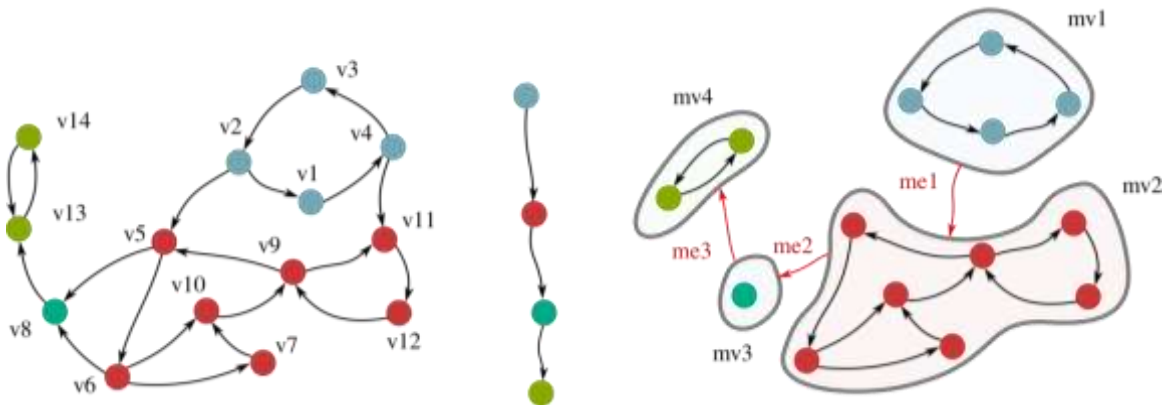


Рисунок 2 – Орграф (слева), конденсация орграфа (в центре) и соответствующий метаграф (справа)

Figure 2 – Digraph (left figure part), digraph condensation (center figure part) and the corresponding metagraph (right figure part)

Рассмотрим реализацию алгоритма Дейкстры определения кратчайших расстояний во взвешенном метаграфе на языке программирования C++. В первую очередь необходимо задать количество метавершин метаграфа  $n$ , количество вершин  $m$ , количество метадуг  $k$ , а также вершину, от которой будет производиться поиск –  $start$ . Для хранения соответствия метавершин вершинам воспользуемся структурой данных вида:

```
std::vector<std::set<int>> s;
```

а, для хранения соответствия вершин метавершинам:

```
std::vector<std::set<int>> v(m).
```

Описание структуры метаграфа сохраняется в виде списка смежности:

```
std::vector<std::vector<std::pair<int, int>>> mg(n).
```

При описании метадуг возможны 4 ситуации:

- метадуга соединяет два метавершины;
- метадуга соединяет метавершину и вершину;
- метадуга соединяет вершину и метавершину;
- метадуга соединяет две вершины.

На Рисунке 3 приводится реализация считывания варианта, когда метадуга соединяет вершину и метавершину.

```
std::string m1, m2;
int w, v1, v2;
for (int i = 0; i < k; i++) {
    if (m1[0] == 'v' && m2[0] == 's') {
        for (auto it = v[v1].begin(); it != v[v1].end(); it++) {
            mg[*it].push_back(std::make_pair(v2, w));
        }
    }
}
```

Рисунок 3 – Сохранение метадуги в списке смежности метаграфа

Figure 3 – Metaarc in a metagraph adjacency list saving

На Рисунке 4 представлен модифицированный алгоритм Дейкстры, позволяющий осуществлять поиск кратчайшего расстояния по списку смежности во взвешенном метаграфе от заданной метавершины до всех остальных.

```
std::vector<int> dist(n, 1e9), p(n);
std::vector<int> u(n);
dist[start - 1] = 0;

// Алгоритм Дейкстры по метавершинам
for (int i = 0; i < n; i++) {
    int v = -1;
    for (int j = 0; j < n; j++)
        if (!u[j] && (v == -1 || dist[j] < dist[v]))
            v = j;
    if (dist[v] == 1e9)
        break;
    u[v] = true;
    for (int j = 0; j < mg[v].size(); j++) {
        int to = mg[v][j].first;
        int len = mg[v][j].second;
        if (dist[v] + len < dist[to]) {
            dist[to] = dist[v] + len;
            p[to] = v;
        }
    }
}
```

Рисунок 4 – Модифицированный алгоритм Дейкстры для метаграфа

Figure 4 – Modified Dijkstra's Metagraph Algorithm

### Результаты

Рассмотрим применение предложенного алгоритма Дейкстры для метаграфа, изображенного на Рисунке 5.

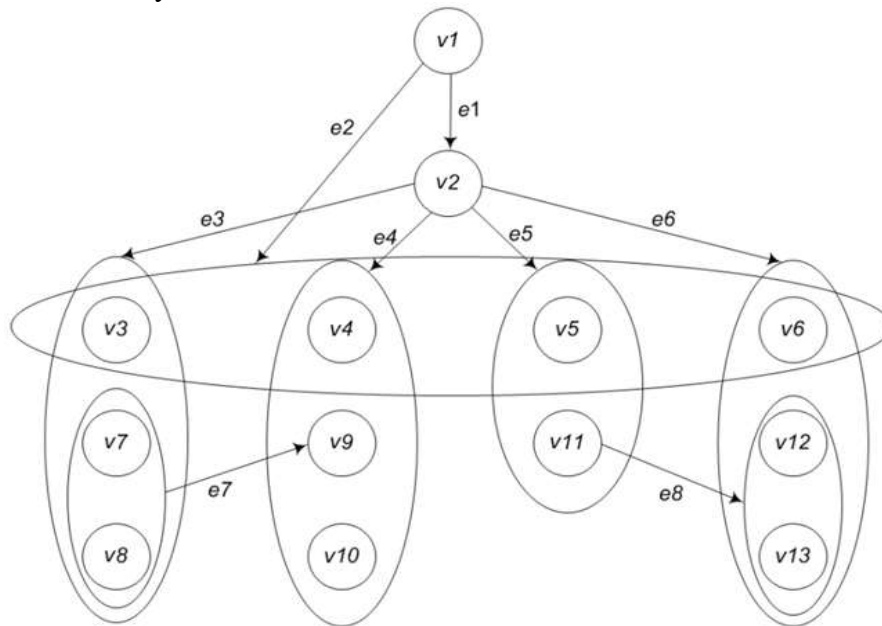


Рисунок 5 – Представление структуры организационной системы в виде метаграфа

Figure 5 – The organizational system structure representation as a metagraph

В программной реализации алгоритма формат входных данных выглядит следующим образом: в первой строке задается 4 числа: количество метавершин  $N$ , количество вершин  $M$ , количество метадуг  $K$  и номер стартовой вершины. В следующих  $N$  строках находится описание каждой метавершины, задаваемое перечислением вершин через пробел. В следующих  $K$  строках находится описание метадуг. Каждая строка содержит три элемента, записанных через пробел: исходящая вершина или метавершина, входящая вершина или метавершина и вес метадуги.

Пример входных данных, задающих метаграф на Рисунке 5:

```

9 13 8 1 // кол-во метавершин, вершин, метадуг, номер стартовой вершины
1 // описание метавершин
2
3 4 5 6
3 7 8
7 8
4 9 10
5 11
6 12 13
12 13
s1 s2 1 // описание метадуг
s1 s3 2
s2 s4 3
s2 s6 4
s2 s7 5
    
```



s2 s8 6  
s5 v9 7  
v11 s9 8

Пример выходных данных для стартовой вершины «1»:

1: 0  
2: 1  
3: 2  
4: 3  
5: 1000000000  
6: 5  
7: 6  
8: 7  
9: 14

### Заключение

Информатизация общества влечет за собой проблему анализа и обработки постоянно прибывающих данных, характеризующих современные технические, экономические и социальные системы. Возможность сбора и хранения больших объемов данных, с одной стороны, осложняет работу исследователей, с другой — существенно повышает точность математического описания предметной области. В этом контексте актуальной задачей представляется развитие методов аппарата графоструктурного моделирования и их применение для описания сложных социально-экономических систем. Рассмотренный в данной статье способ представления информации на основе использования метаграфов позволяет агрегировать данные без потери значений и, с другой стороны, осуществлять детализацию с той степенью точности, которая требуется в конкретной задаче.

### Благодарности

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Липецкой области в рамках научного проекта № 19-47-480003-р\_а.*

### ЛИТЕРАТУРА

1. Biggs N. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press. 1993.
2. Even Sh. *Graph Algorithms: Second Edition*. Cambridge University Press. 2012.
3. Bretto A. *Hypergraph Theory: An Introduction*. Springer, Heidelberg. 2013.
4. Catalyurek U.V., Boman E.G., Devine K.D., Bozdog D. Hypergraph-based Dynamic Load Balancing for Adaptive Scientific Computations. In: *2007 IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium*. Rome. 2007.
5. Kwang H., Lee K. Fuzzy hypergraph and fuzzy partition. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. 1995;25(1):196-201.
6. Lee J., Cho M., Lee K.M. Hyper-graph matching via reweighted random walks. In: *CVPR 2011*. Providence, RI. 2011.
7. Huang Y., Liu Q., Zhang S., Metaxas D.N. Image retrieval via probabilistic hypergraph ranking. In: *2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. San Francisco, CA. 2010.

8. Basu A., Blanning R. Metagraphs: A Tool for Modeling Decision Support Systems. *Management Science*. 1994;40(12):1579-1763.
9. Fang Y., Lin W., Zheng V.W., Wu M. Semantic proximity search on graphs with metagraph-based learning. In: *IEEE 32nd International Conference on Data Engineering (ICDE)*. Helsinki. 2016.
10. Zhao H., Yao Q., Li J., Song Y., Lee D. Meta-Graph Based Recommendation Fusion over Heterogeneous Information Networks. In: *KDD '17: Proceedings of the 23rd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. Canada. 2017.
11. Gaur D., Shastri A., Biswas R. Metagraph-Based Substructure Pattern Mining. In: *International Conference on Advanced Computer Theory and Engineering*. Phuket. 2008.
12. Miroshnikov A., Zhbanova N. Describing the Structures of Socio-economic Systems Using Metagraphs. In: *1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency*. Lipetsk. Russia. 2019.
13. Блюмин С.Л. Графы, гиперграфы, метаграфы, ассоциированные с 2D-системами. *Материалы Междунар. науч.-практ. конф. «Современная математика и ее приложения»*. Стерлитамак. 2017.
14. Блюмин С.Л. Графоструктурное моделирование. Метаграфы и их матрицы. *Вестник ЛГТУ*. 2015;1(23):7-13.
15. Герасименко О.Н., Мирошников А.И. Задачи управления производственными организационными системами с учетом сезонного воздействия окружающей среды. *Экология Центрально-Черноземной области Российской Федерации*. 2012;2:87-88.

## REFERENCES

1. Biggs N. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press. 1993.
2. Even Sh. *Graph Algorithms: Second Edition*. Cambridge University Press. 2012.
3. Bretto A. *Hypergraph Theory: An Introduction*. Springer, Heidelberg. 2013.
4. Catalyurek U.V., Boman E.G., Devine K.D., Bozdog D. Hypergraph-based Dynamic Load Balancing for Adaptive Scientific Computations. In: *2007 IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium*. Rome. 2007.
5. Kwang H., Lee K. Fuzzy hypergraph and fuzzy partition. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. 1995;25(1):196-201.
6. Lee J., Cho M., Lee K.M. Hyper-graph matching via reweighted random walks. In: *CVPR 2011*. Providence, RI. 2011.
7. Huang Y., Liu Q., Zhang S., Metaxas D.N. Image retrieval via probabilistic hypergraph ranking. In: *2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. San Francisco, CA. 2010.
8. Basu A., Blanning R. Metagraphs: A Tool for Modeling Decision Support Systems. *Management Science*. 1994;40(12):1579-1763.
9. Fang Y., Lin W., Zheng V.W., Wu M. Semantic proximity search on graphs with metagraph-based learning. In: *IEEE 32nd International Conference on Data Engineering (ICDE)*. Helsinki. 2016.
10. Zhao H., Yao Q., Li J., Song Y., Lee D. Meta-Graph Based Recommendation Fusion over Heterogeneous Information Networks. In: *KDD '17: Proceedings of the 23rd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. Canada. 2017.
11. Gaur D., Shastri A., Biswas R. Metagraph-Based Substructure Pattern Mining. In: *International Conference on Advanced Computer Theory and Engineering*. Phuket. 2008.

12. Miroshnikov A., Zhanova N. Describing the Structures of Socio-economic Systems Using Metagraphs. In: *1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency*. Lipetsk, Russia. 2019.
13. Blyumin S.L. Graphs, hypergraphs, metagraphs associated with 2D systems. *Proceedings of the international science and practical conf. "Modern mathematics and its applications"*. Sterlitamak. 2017
14. Blyumin S.L. Grafostructural modeling. Metagraphs and their matrices. *Bulletin of Lipetsk State Technical University*. 2015;1(23):7-13.
15. Gerasimenko O.N., Miroshnikov A.I. Managing production tasks in socio-economic systems considering seasonal environmental impact. *Ecology of the Central Black Earth Region of the Russian Federation*. 2012;2:87-88.

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Жбанова Наталья Юрьевна**, к.т.н., доцент кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО "Липецкий государственный технический университет", Липецк, Российская Федерация.  
*email:* [zbanoid@gmail.com](mailto:zbanoid@gmail.com)  
ORCID: [0000-0001-7324-9841](https://orcid.org/0000-0001-7324-9841)

**Natalya Y. Zhanova**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Applied Mathematics Department, Federal State Educational Institution of Higher Education "Lipetsk State Technical University", Lipetsk, Russian Federation

**Мирошников Артём Игоревич**, старший преподаватель кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО "Липецкий государственный технический университет", Липецк, Российская Федерация.  
*e-mail:* [a.i.miroshnikov@yandex.ru](mailto:a.i.miroshnikov@yandex.ru)  
ORCID: [0000-0003-0639-105X](https://orcid.org/0000-0003-0639-105X)

**Artem I. Miroshnikov**, Senior Lecturer of Applied Mathematics Department, Federal State Educational Institution of Higher Education "Lipetsk State Technical University", Lipetsk, Russian Federation