

УДК 517.927

DOI: [10.26102/2310-6018/2020.30.3.003](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2020.30.3.003)

## АППРОКСИМАЦИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА СЕТИ

**О.Р. Балабан**

*ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора  
Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж, Российская Федерация*

**Резюме:** В работе рассматриваются вопросы аппроксимации математических моделей сетеподобных эволюционных процессов переноса применительно к дифференциальным системам с распределенными параметрами на сети (графе). Указан подход, использующий применение теории классических вычислительных методов, состоящий в сведении исследуемой задачи к системам алгебраических уравнений (вспомогательных конечномерных задач), в которых неизвестными являются значения сеточных функций в точках разбиения ребер графа. При этом наличествует достаточно широкая возможность для выбора разного типа сходящихся разностных схем, существенно отличающихся друг от друга: явные разностные схемы, неявные разностные схемы, аналоги разностных схем Кранка-Николсона (ниже, чтобы не загружать исследование техническими сложностями, используются явные разностные схемы). Следует отметить характерную особенность изучаемых математических моделей, наследуемую реологической структурой графа – наличие особых точек графа, в которых дифференциальное уравнение не определяется (узлы или вершины графа) и заменяется обобщенными условиями Кирхгофа. Формализмы последних описывают закономерности переноса сплошных сред в этих точках и требуют отдельного подхода в вопросах аппроксимации (в работе для простоты изложения используются классические разностные отношения). Следует также отметить, что использование при аппроксимации неявной разностной схемы или схемы Кранка-Николсона требует дополнительного анализа вспомогательных конечномерных задач (разрешимость, равномерная ограниченность приближений к решению исходной задачи), но при этом существенно увеличивает точность вычисления приближений. Использование явной разностной схемы освобождено от изучения некоторых из указанных вопросов, однако (и это при анализе некоторых прикладных задач может быть существенным препятствием в использовании) дает достаточно большую погрешность определения решения исходной задачи. Приведенные частные примеры прикладного характера иллюстрируют пути численного анализа дифференциальных систем с носителями на произвольной сети (графе). Полученные результаты достаточно просто переносятся на изучение численными методами волновых процессов и явлений колебания в процессах переноса.

**Ключевые слова:** эволюционные процессы переноса на сетях, аппроксимация, разностная схема, особенности в узлах сети, численные методы.

**Для цитирования:** Балабан О.Р. Аппроксимация эволюционных процессов с распределенными параметрами на сети. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2020;8(3). Доступно по: [https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2020/08/Balaban\\_3\\_20\\_1.pdf](https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2020/08/Balaban_3_20_1.pdf) DOI: 10.26102/2310-6018/2020.30.3.003

## Approximation of evolutionary processes with distributed parameters on a network

**O.R. Balaban**

*Military Training and Scientific Center of the Air Force "Air Force Academy named after  
professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarina", Voronezh, Russian Federation*

**Abstract:** The paper considers the approximation of mathematical models of network-like evolutionary transport processes as applied to differential systems with distributed parameters on a network (graph). An approach is indicated that uses the application of the theory of classical computational methods, which consists in reducing the investigated problem to systems of algebraic equations (auxiliary finite-dimensional problems) in which the values of the grid functions at the points of partition of the edges of the graph are unknown. At the same time, there is a fairly wide opportunity for choosing different types of convergent difference schemes that are significantly different from each other: explicit difference schemes, implicit difference schemes, analogs of Crank-Nicholson difference schemes (below, in order not to load the study with technical difficulties, explicit difference schemes are used). It should be noted a characteristic feature of the studied mathematical models inherited by the rheological structure of the graph — the presence of singular points of the graph at which the differential equation is not determined (nodes or vertices of the graph) and is replaced by generalized Kirchhoff conditions. The formalisms of the latter describe the laws of continuum transfer at these points and require a separate approach to approximation issues (in the work, for the sake of simplicity, classical difference relations are used). It should also be noted that the use of an implicit difference scheme or the Crank-Nicholson scheme for approximation requires additional analysis of auxiliary finite-dimensional problems (solvability, uniform boundedness of approximations to the solution of the original problem), but it significantly increases the accuracy of calculating approximations. The use of an explicit difference scheme is freed from studying some of these issues, however (and this, when analyzing some applied problems, can be a significant obstacle to use) gives a rather large error in determining the solution to the original problem. The given particular examples of applied character illustrate the ways of numerical analysis of differential systems with carriers on an arbitrary network (graph). The results obtained are quite simply transferred to the study of wave processes and oscillation phenomena in transport processes by numerical methods.

**Keywords:** evolutionary transport processes on networks, approximation, difference scheme, features at network nodes, numerical methods.

**For citation:** Balaban O.R. Approximation of evolutionary processes with distributed parameters on a network. *Modeling, optimization and information technology*. 2020;8(3). Available from: [https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2020/08/Balaban\\_3\\_20\\_1.pdf](https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2020/08/Balaban_3_20_1.pdf) DOI: 10.26102/2310-6018/2020.30.3.003 (In Russ).

## Введение

Данная работа является логическим продолжением исследований автора, представленных в [1, 2]. Ниже рассматриваются аппроксимации математических моделей сетеподобных эволюционных процессов переноса применительно к дифференциальным системам с распределенными параметрами на сети. К таковым относятся прежде всего процессы теплопереноса. Численный анализ прикладных задач переноса многофазовых сред в различного типа сетеподобных носителях находится в начальной стадии, так как сопряжен с исследованием начально-краевых задач для дифференциальных систем с распределенными параметрами на сетях. Целью исследователей последнего десятилетия является математическое описание (математическое моделирование) и анализ этих моделей. Сложность состоит в описании мест сочленения (узлах) линейных фрагментов сети. Это относится как к процессу теплопереноса, так и к процессу гидропереноса. В технических задачах особый интерес вызывают гидродинамические процессы, осложненные термальным эффектом, а именно поглощением (выделением) энергии. При транспортировке вязкой среды по гидросети происходит нагрев (охлаждение) гидросистемы, а это значит что необходимо учитывать неизотермическую составляющую при анализе гидродинамического процесса. Для адекватного математического анализа гидродинамического процесса во всей гидросети требуется адекватное математическое описание процесса сопряжения (согласования) в узлах гидросистемы. При этом остается классическая проблема, состоящая в отыскании

условий, когда система является устойчивой к малым изменениям исходного состояния (непрерывности по исходным данным). Последнее является базовым свойством при построении аппроксимационных соотношений для математической модели.

### Обозначения и понятия

На протяжении всей работы используются общепринятые обозначения [3] (см., также [4, 5]). Возьмем граф  $\Gamma$  с произвольным количеством ребер  $\gamma$ ,  $\partial\Gamma$  – множество граничных узлов  $\zeta$  графа  $\Gamma$  и пусть  $\Gamma_0$  – объединение всех ребер, не содержащих конечных точек,  $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$ ,  $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$ . Каждое ребро  $\gamma$  графа  $\Gamma$  параметризуется отрезком  $[0, 1]$  и параметром  $x \in [0, 1]$ , ориентация ребер установлена отрезком  $[0, 1]$ . Пусть  $C[\Gamma]$  – множество непрерывных функций на  $\Gamma$ ,  $C[\Gamma]$  – множество кусочно непрерывных функций и  $C^2[\Gamma]$  – множество функций, все производные которых до второго порядка включительно принадлежат  $C[\Gamma]$ .

Другие обозначения вводятся по мере необходимости.

### Разностная схема эволюционных процессов переноса с распределенными параметрами на произвольной сети (графе)

Рассмотрим вначале произвольный связный граф  $\Gamma$  с конечным числом ребер и внутренних узлов; через  $\xi$  ниже обозначен произвольный внутренний узел графа, а через  $\{\xi\}$  множество внутренних узлов. Далее зафиксируем произвольный внутренний узел  $\xi$  и через  $R(\xi)$  обозначим множество ребер, ориентированных «к узлу  $\xi$ »,  $r(\xi)$  – множество ребер, ориентированных «от узла  $\xi$ ». Функция  $u(x, t)$ ,  $(x, t) \in \Gamma \times [0, T]$  ( $0 < T < \infty$ ) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in \Gamma_T, \quad (1)$$

$$(u(1, t))_{R(\xi)} = (u(0, t))_{r(\xi)}, \quad \sum_{R(\xi)} \frac{\partial u(1, t)}{dx} = \sum_{r(\xi)} \frac{\partial u(0, t)}{dx}, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

здесь  $a(x)$  – коэффициент, характеризующий определяющее свойство процесса переноса – коэффициент теплопроводности, диффузии или вязкости переносимой среды. Соотношение (1), (2) назовем уравнением переноса по сетевому носителю (графу  $\Gamma$ ) при изменении временной переменной  $t \in (0, T)$ . Присоединяя к уравнению (1), (2) начальное

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma \quad (3)$$

и граничные

$$u(0, t)_{\partial\Gamma} = 0, \quad u(1, t)_{\partial\Gamma} = 0, \quad t \in (0, T) \quad (4)$$

условия, получаем начально-краевую задачу (1)-(4).

Можно считать, что область  $\Gamma_T$  является цилиндром, на котором определено уравнение (1), (2). При этом соотношения (4) задаются на множестве  $\partial\Gamma \times (0, T)$ . Функция  $u(x, t)$  класса  $C^2(\Gamma_T) \cap C(\Gamma \times [0, T])$  является решением краевой задачи (1)-(4) (используются общепринятые обозначения  $C(\Omega)$  и  $C^2(\Omega)$  пространств непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций на множестве  $\Omega$  [5, 6]). Она удовлетворяет уравнению (1), (2) в области  $\Gamma_T$ , начальным условиям (3) при  $t = 0$ ,  $x \in \Gamma$  и граничным условиям (4) в области  $\partial\Gamma \times (0, T)$ .

**Теорема.** Начально-краевая задача (1)-(4) имеет единственное слабое решение  $u(x, t)$ , непрерывно зависящее от исходных данных. Подробное доказательство утверждения приведено в работе [6] (см. также [7, 8]). Нетрудно показать, что слабое решение  $u(x, t)$  принадлежит классу  $C^2(\Gamma_T) \cap C(\Gamma \times [0, T])$ .

Аппроксимация задачи (1)-(4) приводит к разностной схеме вида:

$$\frac{(u_k^{j+1})_\gamma - (u_k^j)_\gamma}{\tau} = (a_k)_\gamma \frac{(u_{k-1}^j)_\gamma - 2(u_k^j)_\gamma + (u_{k+1}^j)_\gamma}{h^2}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma \subset R(\xi)} = (u_0^{j+1})_{\gamma \subset R(\xi)},$$

$$\sum_{\gamma \subset R(\xi)} ((u_n^{j+1})_\gamma - (u_{n-1}^{j+1})_\gamma) = \sum_{\gamma \subset R(\xi)} ((u_1^{j+1})_\gamma - (u_0^{j+1})_\gamma),$$

$$u_k^0 = \varphi_k, \quad k = \overline{0, n}, \quad (u_0^{j+1})_{\gamma \in \partial\Gamma} = (u_1^{j+1})_{\gamma \in \partial\Gamma} = 0.$$

Здесь индексом  $k$  пронумерованы узловые точки деления ребер, индексом  $j$  – узловые точки деления отрезка  $[0, 1]$ , символом  $(\cdot)_\gamma$  обозначены значения сужений  $u(x, t)_\gamma$ ,  $a(x)_\gamma$  функций  $u(x, t)$ ,  $a(x)$  на соответствующее ребро  $\gamma$  графа.

Здесь и всюду ниже нами используется явная схема при аппроксимации соотношения (1) уравнения (1), (2) на внутренней части всех ребер графа. Далее приведем аппроксимации эволюционных процессов переноса с распределенными параметрами на основных типах сетей (графов).

### Простейший граф

Возьмем граф  $\Gamma$  с ребрами  $\gamma_\ell$  ( $\ell = \overline{1, m}$ ) (для простоты изложения считаем  $m=3$ , рисунок 1),  $\xi_1, \xi_2$  – внутренние узлы графа.

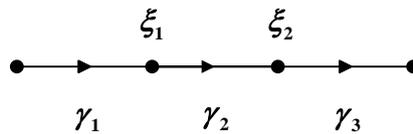


Рисунок 1 - Простейший граф  
 Figure 1 - The simplest graph

Пусть функция  $u(x, t)$ , определяющая количественные характеристики процесса переноса, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in \Gamma_T, \quad (5)$$

условиям согласования в узле  $\xi_1$

$$u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_1} = u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_2},$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_1} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_2} \quad (6)$$

при  $t \in (0, T)$  и узле  $\xi_2$

$$\begin{aligned} u(x,t)\Big|_{x=1\in\gamma_2} &= u(x,t)\Big|_{x=0\in\gamma_3}, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=1\in\gamma_2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0\in\gamma_3} \end{aligned} \quad (7)$$

при  $t \in (0, T)$ , начальному

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma \quad (8)$$

и граничным

$$u(x,t)\Big|_{x=0\in\gamma_1} = 0, \quad u(x,t)\Big|_{x=1\in\gamma_3} = 0, \quad t \in [0, T] \quad (9)$$

условиям. Используя принятые выше обозначения получим аппроксимацию и разностную схему для начально-краевой задачи (5)-(9):

$$\begin{aligned} \frac{(u_k^{j+1})_{\gamma_\ell} - (u_k^j)_{\gamma_\ell}}{\tau} &= (a_k)_{\gamma_\ell} \frac{(u_{k-1}^j)_{\gamma_\ell} - 2(u_k^j)_{\gamma_\ell} + (u_{k+1}^j)_{\gamma_\ell}}{h^2}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad \ell = 1, 2, 3, \\ (u_n^{j+1})_{\gamma_1} &= (u_0^{j+1})_{\gamma_2}, \\ (u_n^{j+1})_{\gamma_1} - (u_{n-1}^{j+1})_{\gamma_1} &= (u_1^{j+1})_{\gamma_2} - (u_0^{j+1})_{\gamma_2}, \\ (u_n^{j+1})_{\gamma_2} &= (u_0^{j+1})_{\gamma_3}, \\ (u_n^{j+1})_{\gamma_2} - (u_{n-1}^{j+1})_{\gamma_2} &= (u_1^{j+1})_{\gamma_3} - (u_0^{j+1})_{\gamma_3}, \\ u_k^0 &= \varphi_k, \quad k = \overline{0, n}, \quad (u_0^{j+1})_{\gamma_1} = (u_n^{j+1})_{\gamma_3} = 0. \end{aligned}$$

Здесь, как и выше, индексом  $k$  пронумерованы узловые точки деления ребер, через  $j$  – узловые точки деления отрезка  $[0, T]$ , через  $(\cdot)_{\gamma_\ell}$  обозначены значения сужений  $u(x, t)_{\gamma_\ell}$ ,  $a(x)_{\gamma_\ell}$  функций  $u(x, t)$ ,  $a(x)$  ( $\ell = 1, 2, 3$ ) на соответствующее ребро.

### Граф-звезда

Пусть далее  $\Gamma$  – граф с ребрами  $\gamma_\ell$  ( $\ell = \overline{1, m}$ ) (для определенности  $m=3$ , рисунок 2) и внутренним узлом  $\xi$ .

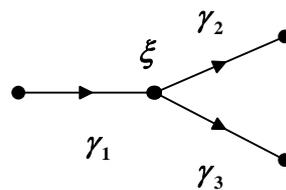


Рисунок 2 - Граф-звезда  
 Figure 2 - Star graph

Пусть функция  $u(x, t)$ , определяющая количественные характеристики процесса переноса, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (10)$$

условиям согласования в узле

$$u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_1} = u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_2} = u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_3},$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_1} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_2} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_3},$$
(11)

при  $t \in (0, T)$ , начальному

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma$$
(12)

и граничным

$$u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_1} = 0, \quad u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_2} = 0, \quad u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_3} = 0, \quad t \in [0, T]$$
(13)

условиям.

Аппроксимация соотношений (10)-(13) (предыдущие соотношения сохраняются) приводит к разностной схеме для начально-краевой задачи (10)-(13):

$$\frac{(u_k^{j+1})_{\gamma_\ell} - (u_k^j)_{\gamma_\ell}}{\tau} = (a_k)_{\gamma_\ell} \frac{(u_{k-1}^j)_{\gamma_\ell} - 2(u_k^j)_{\gamma_\ell} + (u_{k+1}^j)_{\gamma_\ell}}{h^2}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad \ell = 1, 2, 3,$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma_1} = (u_0^{j+1})_{\gamma_2} = (u_0^{j+1})_{\gamma_3},$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma_1} - (u_{n-1}^{j+1})_{\gamma_1} = (u_1^{j+1})_{\gamma_2} - (u_0^{j+1})_{\gamma_2} + (u_1^{j+1})_{\gamma_3} - (u_0^{j+1})_{\gamma_3},$$

$$u_k^0 = \varphi_k, \quad k = \overline{0, n}, \quad (u_0^{j+1})_{\gamma_1} = (u_n^{j+1})_{\gamma_2} = (u_n^{j+1})_{\gamma_3} = 0.$$

### Объединение простейшего графа и графа-звезда

Возьмем граф  $\Gamma$  ребрами  $\gamma_\ell (\ell = \overline{0, m})$ , где  $m=3$  (рисунок 3),  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  ( $\Gamma_1 = \{\gamma_0, \gamma_1\}$ ,  $\Gamma_2 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ ). Каждое из ребер  $\gamma_k (\ell = \overline{0, 3})$  графа  $\Gamma$  параметризуется отрезком  $[0, 1]$ . Граф имеет 2 внутренних узла  $\xi_1, \xi_2$ . Здесь  $\gamma_\ell, \ell = 0, 1$  – ребра простейшего графа  $\Gamma_1$ ,  $\gamma_\ell, \ell = 1, 2, 3$  – ребра графа-звезды  $\Gamma_2$ .

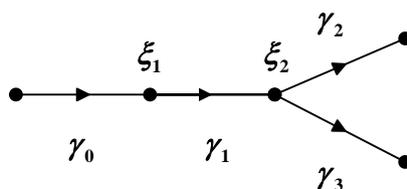


Рисунок 3 - Граф-звезда с приставленным ребром  
Figure 3 - Star graph with an attached edge

Функция  $u(x, t)$ ,  $(x, t) \in \Gamma \times [0, T]$ , удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$
(14)

условиям согласования в узле  $\xi_1$

$$u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_0} = u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_1},$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_0} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_1},$$
(15)

в узле  $\xi_2$

$$u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_1} = u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_2} = u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_3},$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{dx} \Big|_{x=1 \in \gamma_1} = \frac{\partial u(x, t)}{dx} \Big|_{x=0 \in \gamma_2} + \frac{\partial u(x, t)}{dx} \Big|_{x=0 \in \gamma_3},$$

начальным

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma \tag{17}$$

и граничным

$$u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_0} = 0, \quad u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_2} = 0, \quad u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_3} = 0, \quad t \in [0, T] \tag{18}$$

условиям.

Аппроксимация соотношений (14)-(18) (предыдущие соотношения сохраняются) приводит к разностной схеме для начально-краевой задачи (14)-(18):

$$\frac{(u_k^{j+1})_{\gamma_\ell} - (u_k^j)_{\gamma_\ell}}{\tau} = (a_k)_{\gamma_\ell} \frac{(u_{k-1}^j)_{\gamma_\ell} - 2(u_k^j)_{\gamma_\ell} + (u_{k+1}^j)_{\gamma_\ell}}{h^2}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad \ell = 0, 1, 2, 3,$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma_0} = (u_0^{j+1})_{\gamma_1},$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma_0} - (u_{n-1}^{j+1})_{\gamma_0} = (u_1^{j+1})_{\gamma_1} - (u_0^{j+1})_{\gamma_1},$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma_1} = (u_0^{j+1})_{\gamma_2} = (u_0^{j+1})_{\gamma_3},$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma_1} - (u_{n-1}^{j+1})_{\gamma_1} = (u_1^{j+1})_{\gamma_2} - (u_0^{j+1})_{\gamma_2} + (u_1^{j+1})_{\gamma_3} - (u_0^{j+1})_{\gamma_3},$$

$$u_k^0 = \varphi_k, \quad k = \overline{0, n}, \quad (u_0^{j+1})_{\gamma_0} = (u_n^{j+1})_{\gamma_2} = (u_n^{j+1})_{\gamma_3} = 0,$$

### Граф с циклом

Рассмотрим граф  $\Gamma$  ребрами  $\gamma_\ell (\ell = \overline{0, m})$ , где  $m=6$  (рисунок 4) и внутренними узлами  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ . Каждое из ребер графа  $\Gamma$  параметризуется отрезком  $[0, 1]$ .

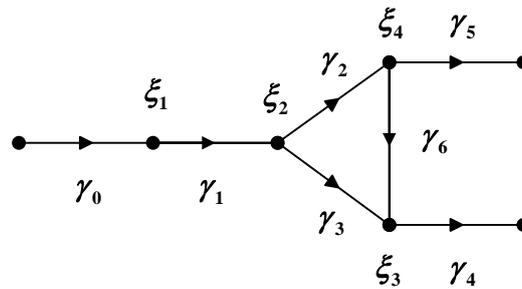


Рисунок 4 - Граф с циклом  
 Figure 4 - Graph with a cycle

Функция  $u(x, t)$ ,  $(x, t) \in \Gamma \times [0, T]$ , удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \tag{19}$$

условиям согласования в узле  $\xi_1$

$$u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_0} = u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_1},$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{dx} \Big|_{x=1 \in \gamma_0} = \frac{\partial u(x, t)}{dx} \Big|_{x=0 \in \gamma_1}, \tag{20}$$

в узле  $\xi_2$

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_1} &= u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_2} = u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_3}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_1} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_2} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_3}, \end{aligned} \quad (21)$$

в узле  $\xi_3$

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_3} &= u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_6} = u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_4}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_3} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_6} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_4}, \end{aligned} \quad (22)$$

в узле  $\xi_4$

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_2} &= u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_5} = u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_6}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_5} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_6}, \end{aligned} \quad (23)$$

начальным

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma \quad (24)$$

и граничным

$$u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_0} = 0, \quad u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_4} = 0, \quad u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_5} = 0, \quad t \in [0, T] \quad (25)$$

условиям.

Аппроксимация соотношений (19)-(25) (предыдущие соотношения сохраняются) приводит к разностной схеме для начально-краевой задачи (19)-(25):

$$\frac{(u_k^{j+1})_{\gamma_\ell} - (u_k^j)_{\gamma_\ell}}{\tau} = (a_k)_{\gamma_\ell} \frac{(u_{k-1}^j)_{\gamma_\ell} - 2(u_k^j)_{\gamma_\ell} + (u_{k+1}^j)_{\gamma_\ell}}{h^2}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad \ell = 0, 1, 2, 3, 5, 6,$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma_0} = (u_0^{j+1})_{\gamma_1},$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma_0} - (u_{n-1}^{j+1})_{\gamma_0} = (u_1^{j+1})_{\gamma_1} - (u_0^{j+1})_{\gamma_1},$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma_1} = (u_0^{j+1})_{\gamma_2} = (u_0^{j+1})_{\gamma_3},$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma_1} - (u_{n-1}^{j+1})_{\gamma_1} = (u_1^{j+1})_{\gamma_2} - (u_0^{j+1})_{\gamma_2} + (u_1^{j+1})_{\gamma_3} - (u_0^{j+1})_{\gamma_3},$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma_3} = (u_n^{j+1})_{\gamma_6} = (u_0^{j+1})_{\gamma_4},$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma_3} - (u_{n-1}^{j+1})_{\gamma_3} + (u_n^{j+1})_{\gamma_6} - (u_{n-1}^{j+1})_{\gamma_6} = (u_1^{j+1})_{\gamma_4} - (u_0^{j+1})_{\gamma_4},$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma_2} = (u_0^{j+1})_{\gamma_5} = (u_0^{j+1})_{\gamma_6},$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma_2} - (u_{n-1}^{j+1})_{\gamma_2} = (u_1^{j+1})_{\gamma_5} - (u_0^{j+1})_{\gamma_5} + (u_1^{j+1})_{\gamma_6} - (u_0^{j+1})_{\gamma_6},$$

$$u_k^0 = \varphi_k, \quad k = \overline{0, n}, \quad (u_0^{j+1})_{\gamma_0} = (u_n^{j+1})_{\gamma_4} = (u_n^{j+1})_{\gamma_5} = 0,$$

### Заключение

Представлены аппроксимации математических моделей сетеподобных эволюционных процессов переноса, описываемых дифференциальными системами с распределенными параметрами на сети (графе). Построены разностные схемы для математических моделей с носителями на основных фрагментах сети (произвольного графа) – на простейшем графе, графе-звезда, объединении простейшего графа и графа-звезды, графе с циклом, которые являются основными фрагментами носителей процесса переноса. Получены

численные расчеты для указанных моделей, применимые к различным типам переноса: диффузия, теплоперенос и гидромассоперенос. Результаты работы могут быть использованы в задачах оптимального управления указанными эволюционными процессами в сетях [6-10].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Балабан О.Р. Аппроксимация эволюционных дифференциальных систем с распределенными параметрами на сети и метод моментов. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2019;7(3). Доступно по: [https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2019/09/Balaban\\_3\\_19\\_1.pdf](https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2019/09/Balaban_3_19_1.pdf). DOI: 10.26102/2310-6018/2019.26.3.040 (дата обращения: 29.05.2020).
2. Балабан О.Р., Иванов А.В. Аппроксимация эволюционных уравнений параболического типа на сети. *Системы управления и информационные технологии*. 2018;4(74):4-7.
3. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. М.:Наука. 1977:456.
4. Провоторов В.В., Провоторова Е.Н. Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2017;13(2):209-224. Доступно по: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.207>. (дата обращения: 29.05.2020).
5. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Определение стартовой функции в задаче наблюдения параболической системы с распределенными параметрами на графе. *Вестник Воронежского государственного технического университета*. 2014;10(6):29-35.
6. Провоторов В.В. Метод моментов в задаче гашения колебаний дифференциальной системы на графе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2010;2:60-69.
7. Провоторов В.В. Моделирование колебательных процессов «мачта-растяжки». *Системы управления и информационные технологии*. 2008;1.2(31):272-277.
8. Provotorov V.V., Ryazhskikh V.I., Gnilitskaya Yu.A. Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike region. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*. 2017;13(3):264-277. Доступно по: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.304>. (дата обращения: 29.05.2020).
9. Zhabko A.P., Provotorov V.V., Balaban O.R. Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*. 2019;15(2):187-198. Доступно по: <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.203>. (дата обращения: 30.05.2020).
10. Balaban O.R. Approximation of elliptic operator of evolutionary systems with distributed parameters on a network. *Modern informatization problems in simulation and social technologies (MIP-2019'SCT): Proceedings of the XXIV-th International Open Science Conference (Yelm, WA, USA, January 2019)*. 2019:148-154.

## REFERENCES

1. Balaban O.R. Approksimatsiya ehvolyutsionnykh differentsial'nykh sistem s raspredelennymi parametrami na seti i metod momentov. *Modeling, optimization and information technology*. 2019;7(3). Available at: [https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2019/09/Balaban\\_3\\_19\\_1.pdf](https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2019/09/Balaban_3_19_1.pdf). DOI: 10.26102/2310-6018/2019.26.3.040 (accessed: 29.05.2020).
2. Balaban O.R., Ivanov A.V. Approksimatsiya ehvolyutsionnykh uravnenii parabolicheskogo tipa na seti. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii*. 2018;4(74):4-7.
3. Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noi matematiki*. M.:Nauka. 1977:456.
4. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Synthesis of optimal boundary control of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2017;13(2):209-224. Available at: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.207>. (accessed: 29.05.2020).
5. Podval'nyi S.L., Provotorov V.V. Opredelenie startovoi funktsii v zadache nablyudeniya parabolicheskoi sistemy s raspredelennymi parametrami na grafe. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2014;10(6):29-35.
6. Provotorov V.V. Metod momentov v zadache gasheniya kolebanii differentsial'noi sistemy na grafe. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2010;2:60-69.
7. Provotorov V.V. Modelirovanie kolebatel'nykh protsessov «machta-rastyazhki». *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii*. 2008;1.2(31):272-277.
8. Provotorov V.V., Ryazhskikh V.I., Gnilitskaya Yu.A. Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike region. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*. 2017;13(3):264-277. Available at: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.304>. (accessed: 29.05.2020).
9. Zhabko A.P., Provotorov V.V., Balaban O.R. Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*. 2019;15(2):187-198. Available at: <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.203>. (accessed: 30.05.2020).
10. Balaban O.R. Approximation of elliptic operator of evolutionary systems with distributed parameters on a network. *Modern informatization problems in simulation and social technologies (MIP-2019'SCT): Proceedings of the XXIV-th International Open Science Conference (Yelm, WA, USA, January 2019)*. 2019:148-154.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Балабан Олеся Руслановна**, младший научный сотрудник, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Российская Федерация.

e-mail: [bal-olesya@mail.ru](mailto:bal-olesya@mail.ru)

**Olesya R. Balaban**, Junior Researcher, Military Training And Scientific Center Of The Air Force "Air Force Academy Named After Professor N.E. Zhukovsky And Y.A. Gagarina ", Voronezh, Russian Federation.