УДК 519.873, 004.056 DOI: 10.26102/2310-6018/2021.33.2.001

Дисперсия стоимости восстановлений и оптимизационные задачи в процессах восстановления технических и информационных систем

В.И. Вайнштейн

ФГАО ВО «Сибирский федеральный университет», Красноярск, Российская Федерация

Резюме: В работе рассматриваются процессы восстановления с учетом стоимости восстановлений. Для простого и общего процесса выведены формулы дисперсии стоимости восстановлений. Наличие этих формул, вместе с формулами для среднего числа отказов, средней стоимости восстановлений и их дисперсий дают возможность постановок оптимизационных задач в терминах риск – дисперсия, цена – средняя стоимость, качество – среднее число восстановлений при организации процессов и стратегий восстановления. Представлена задача о минимизации дисперсии стоимости восстановлений при ограничениях на среднее число отказов, среднюю стоимость восстановлений на задаваемом промежутке времени и приведено ее решение при простом процессе с экспоненциальным распределением. Сформулирована задача в терминах цена, качество, риск по оптимальному формированию функции распределения, задающей процесс восстановления в виде смеси задаваемых функций распределения. Рассмотренные в статье задачи по формулировке схожи с известными задачами Марковица о формировании портфеля ценных бумаг. Отмечается, что оптимизационные задачи в терминах цена, качество, риск можно расширить за счет включения вопросов выбора стратегий восстановления, в которых время проведения профилактических восстановлений определяется, например, по критерию минимума интенсивности затрат или максимума коэффициента готовности – показателя, играющего существенную роль в процессе эксплуатации информационных систем. При экспоненциальном распределении простого процесса восстановления выписаны формулы Чебышева и коэффициенты вариации для числа отказов и стоимости восстановлений. Полученные в работе результаты предназначены для постановки и решения оптимизационных задач, возникающих при эксплуатации технических и информационных систем, систем защиты информации, средств обеспечения информационной безопасности в компьютерных системах и сетях в ситуациях возникновения угроз, носящих случайный, непреднамеренный характер.

Ключевые слова: функция распределения, функция восстановления, дисперсия стоимости восстановлений, процесс восстановления, неравенство Чебышева.

Для цитирования: Вайнштейн В.И. Дисперсия стоимости восстановлений и оптимизационные задачи в процессах восстановления технических и информационных систем. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2021;9(2). Доступно по: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=931 DOI: 10.26102/2310-6018/2021.33.2.001.

Dispersion of the cost of recovery and optimization problems in the recovery processes of technical and information systems

V. I. Vainshtein

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation

Abstract: The work deals with recovery processes taking into account the cost of recovery. For a simple and general process, formulas for the variance of the cost of recovery are derived. The presence of these formulas, together with formulas for the average number of failures, the average cost of recovery and their variances, make it possible to formulate optimization problems in terms of risk - variance, price - average cost, quality - the average number of recovery when organizing processes and recovery strategies. The problem of minimizing the variance of the cost of recovery is presented under constraints on the average number of failures, the average cost of recovery over a given time interval, and its solution is given for a simple process with an exponential distribution. The problem is formulated in terms of price, quality, risk for the optimal formation of the distribution function, which sets the recovery process in the form of a mixture of given distribution functions. The formulation tasks considered in the article are similar to the well-known Markowitz tasks on the formation of a portfolio of securities. It is noted that optimization tasks in terms of price, quality, risk can be expanded by including the issues of choosing recovery strategies, in which the time of preventive recovery is determined, for example, by the criterion of minimum cost intensity or maximum availability factor - an indicator that plays a significant role in the operation process. information systems. With an exponential distribution of a simple recovery process, Chebyshev's formulas and coefficients of variation for the number of failures and the cost of recovery are written. The results obtained in this work are intended for the formulation and solution of optimization problems arising during the operation of technical and information systems, information protection systems, information security means in computer systems and networks in situations of occurrence of threats that are of a random, unintended nature.

Keywords: distribution function, recovery process, recovery function, variance of the recovery cost, Chebyshev's inequality.

For citation: Vainshtein V.I. Dispersion of the cost of recovery and optimization problems in the recovery processes of technical and information systems. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2021;9(1). Available from: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=931 DOI: 10.26102/2310-6018/2021.33.2.001 (In Russ).

Введение

Отказы при работе технических и информационных систем имеют, как правило, случайный характер. В связи с этим, такие важные характеристики работы указанных систем, например, число отказов и стоимость восстановлений являются случайными величинами. Методы математической теории надежности позволяют строить оптимизационные математические модели работы систем, как при их проектировании, так и при эксплуатации. Можно выделить задачи оптимизации структуры систем и задачи эксплуатации по выбору оптимальных стратегий эксплуатации, например, по критериям минимума интенсивности затрат или по такому важному показателю в работе информационных систем, как коэффициент готовности, когда наряду с аварийными восстановлениями могут проводиться профилактические восстановления.

В работе будет рассмотрен класс оптимизационных задач, связанных со средним числом отказов, средней стоимостью восстановлений и их дисперсиями, а также с рядом других числовых характеристик работы элементов технических и информационных систем, средств защиты информации при отказах, имеющих случайный характер. Дисперсиям придается смысл риска, а средним – цены и качества, что приводит к оптимизационным задачам в терминах – цена, качество, риск.

Также будут получены формулы для нахождения дисперсии стоимости восстановлений на интервале от 0 до t в процессе восстановления.

Процесс восстановления

Последовательность неотрицательных независимых случайных величин X_i с функциями распределения $F_i(t)$, $i = 1,2, ...$, называется процессом восстановления [1-4]. Например, когда в работе технических или информационно-вычислительных систем отказы элементов имеют случайный характер и отказавшие элементы восстанавливаются. Здесь X_i- наработки заменяемых элементов от (i-1)-го до i- го отказа**,** $F_i(t)$ – их функции распределения.

Пусть $c_i, i = 1,2, ...$ затраты на i −е восстановление, c_0 – стоимость элемента, установленного в начальный момент времени $t = 0$ и X_0 случайная величина, с распределением $F_0(t) = 0$ при $t \leq 0$ и $F_0(t) = 1$ при $t > 0$.

Последовательность (X_i, c_i), $i = 0,1, ...$, будем называть процессом восстановления с учетом стоимости восстановлений [3,5].

Предположения о функциях распределения приводят к различным математическим моделям процессов восстановления [3,6,7].

В работе рассматривается простой процесс восстановления при котором функции распределения $F_i(t)$ совпадают ($F_i(t) = F_1(t)$) и общий (запаздывающий) процесс, когда функции $F_i(t)$ совпадают, начиная с номера $i = 2$ ($F_i(t) = F_2(t), i \geq 2$).

Процесс восстановления с учетом стоимости восстановлений определяет случайные величины $N(t)$ - количество отказов (восстановлений) и $C(t)$ –стоимость восстановлений за время от 0 до t.

Так

$$P(N(t) = n) = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t), \quad (1)$$

$F^{(n)}(t)$-n-кратная свертка функций распределения $F_i(t), i = 1,2, ..., n$,

$$F^{(n)}(t) = (F^{(n-1)} * F_n)(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t - x)dF_n(x), F^{(1)}(t) = F_1(t),$$

$$C(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} c_i. \quad (2)$$

Математическое ожидание числа отказов называют функцией восстановления $H(t)$ и

$$H(t) = E(N(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t). \quad (3)$$

Отметим, что имеются другие эквивалентные определения процесса восстановления с другими обозначениями его характеристик.

Пусть функция S(t)=E(C(t)) – функция затрат, среднее значение стоимости восстановлений на промежутке $[0, t]$. Она выражается по формуле [3,5]

$$S(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n F^{(n)}(t). \quad (4)$$

Предполагается, если $F_i(t) = F_j(t)$, то и $c_i = c_j$. Пусть $HF(t)$ функция восстановления простого процесса с функцией распределения $F(t)$, $HFG(t)$ функция восстановления общего процесса, с первой функцией распределения $F(t)$, второй и следующими – $G(t)$, Аналогично определяются функции $SF(t)$, $SFG(t)$.

Для функций восстановления и затрат, с учетом (3), (4), имеют место представления [1-3,5]

$$HF_1(t) = F_1(t) + \int_0^t H F_1(t - x)dF_1(x), HF_1F_2(t) = F_1(t) + \int_0^t H F_2(t - x)dF_1(x),$$

$$SF_1(t) = c_0 + (c_1 - c_0)F_1(t) + \int_0^t S\,F_1(t-x)dF_1(x),$$

$$SF_1F_2(t) = c_0(1 - F_2(t)) + c_1F_1(t) + (c_2 - c_1)(F_1 * F_2)(t) + \int_0^t S\,F_1F_2(t-x)dF_2(x),$$

$$SF_1(t) = c_0 + c_1HF_1(t), \tag{5}$$

$$SF_1F_2(t) = c_0 + (c_1 - c_2)F_1(t) + c_2HF_1F_2(t). \tag{6}$$

Далее

$$D(N(t)) = 2\int_0^t H\,F_1(t-x)dHF_1(x) + HF_1(t) - H^2F_1(t)$$

для простого процесса восстановления [1,2] и

$$D(N(t)) = 2\int_0^t H\,F_2(t-x)dHF_1F_2(x) + HF_1F_2(t) - H^2F_1F_2(t) \tag{7}$$

общего процесса восстановления [8,9].

Дисперсия стоимости восстановлений

Получим формулу дисперсии $D(C(t))$ стоимости восстановлений. По определению

$$D(C(t)) = E(C^2(t)) - E^2(C(t)) = E(C^2(t)) - S^2(t).$$

Для вычисления дисперсии необходимо вычислить $E(C^2(t))$.

По определению математического ожидания, с учетом (1), (2), имеем

$$E(C^2(t)) = c_0^2(1 - F_1(t)) + \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} c_i)^2 P(N(t) = n) =$$

$$= c_0^2(1 - F_1(t)) + \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} c_i)^2 (F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t)) =$$

$$= c_0^2(1 - F_1(t)) + \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} c_i)^2 F^{(n)}(t) - \sum_{n=2}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n-1} c_i)^2 F^{(n)}(t) =$$

$$= c_0^2\big(1 - F_1(t)\big) + c_0^2F_1(t) + 2c_0c_1F_1(t) + c_1^2F_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} c_i)^2 F^{(n)}(t) -$$

$$- \sum_{n=2}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} c_i - c_n)^2 F^{(n)}(t) =$$

$$= c_0^2 + c_1^2F_1(t) + 2c_0c_1F_1(t) - (\sum_{n=2}^{\infty}((\sum_{i=0}^{n} c_i - c_n)^2 - (\sum_{i=0}^{n} c_i)^2)F^{(n)}(t)) =$$

$$= c_0^2 + c_1^2F_1(t) + 2c_0c_1F_1(t) - \sum_{n=2}^{\infty}(-c_n)(2\sum_{i=0}^{n} c_i - c_n)F^{(n)}(t) =$$

$$= c_0^2 + c_1^2F_1(t) + 2c_0c_1F_1(t) - \sum_{n=2}^{\infty}(c_n^2 - 2c_n\sum_{i=0}^{n} c_i)F^{(n)}(t) =$$

$$= c_0^2 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 F^{(n)}(t) + 2c_1^2 F_1(t) + 2c_0 c_1 F_1(t) + 2\sum_{n=2}^{\infty} c_n (\sum_{i=0}^{n} c_i) F^{(n)}(t) =$$

$$= c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n (\sum_{i=0}^{n} c_i) F^{(n)}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 F^{(n)}(t).$$

С учетом полученной формулы для $E\big(C^2(t)\big)$, дисперсия стоимости восстановлений имеет вид

$$D(C(t)) = c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n (\sum_{i=0}^{n} c_i) F^{(n)}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 F^{(n)}(t) - S^2(t). \quad (8)$$

Дисперсия стоимости восстановлений при общем процессе восстановления

Пусть $F_i(t) = F_2(t), c_i = c_2, i = 2,3, \dots$ Последовательно получаем

$$E(C^2(t)) = c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n (\sum_{i=0}^{n} c_i) F^{(n)}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 F^{(n)}(t) =$$

$$= c_0^2 + 2(c_1(c_0 + c_1)F_1(t) + c_2 \sum_{n=2}^{\infty} (c_0 + c_1 + (n-1)c_2) F^{(n)}(t)) -$$

$$- c_1^2 F_1(t) - c_2^2 \sum_{n=2}^{\infty} F^{(n)}(t) =$$

$$= c_0^2 + 2(c_1(c_0 + c_1)F_1(t) - c_2(c_0 + c_1)F_1(t) + c_2(c_0 + c_1) \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) +$$

$$+ c_2^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) F^{(n)}(t)) - (c_1^2 F_1(t) - c_2^2 F_1(t) + c_2^2 \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t)) =$$

$$= c_0^2 + 2((c_0 + c_1)(c_1 - c_2)F_1(t) + c_2(c_0 + c_1) HF_1F_2(t) +$$

$$+ c_2^2 \sum_{n=1}^{\infty} n F^{(n)}(t) - c_2^2 F_1(t) + c_2^2 F_1(t) - c_2^2 HF_1F_2(t)) - ((c_1^2 - c_2^2)F_1(t) + c_2^2 HF_1F_2(t)) =$$

$$= c_0^2 + (c_1 - c_2)(2c_0 + c_1 - c_2)F_1(t) + (2c_2(c_0 + c_1) - 3c_2^2) HF_1F_2(t) + 2c_2^2 \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} n F^{(n)}(t). \quad (9)$$

Учитывая, что при общем процессе восстановления [8,9]

$$\sum_{n=1}^{\infty} n F^{(n)}(t) = \int_0^t H F_2(t-x) dHF_1F_2(x) + HF_1F_2(t),$$

в соответствии с (8), (9) получаем формулу дисперсии стоимости восстановлений при общем процессе восстановления

$$D(C(t)) = c_0^2 + (c_1 - c_2)(2c_0 + c_1 - c_2)F_1(t) + (2c_2(c_0 + c_1) - c_2^2) HF_1F_2(t) +$$

$$+ 2c_2^2 \int_0^t H F_2(t-x) dHF_1F_2(x) - S^2 F_1F_2(t). \quad (10)$$

После подстановки (6) в (10)

$$D(C(t)) = (c_1 - c_2)^2 F_1(t) + (2c_2c_1 - c_2^2) HF_1F_2(t) + 2c_2^2 \int_0^t H F_2(t-x) dHF_1F_2(x) -$$

$$-((c_1-c_2)F_1(t)+c_2HF_1F_2(t))^2.$$

С учетом (7)

$$D(C(t))=(c_1-c_2)^2F_1(t)(1-F_1(t))+2c_2(c_1-c_2)HF_1F_2(t)(1-F_1(t))+c_2^2D(N(t)). \quad (11)$$

Дисперсия стоимости восстановлений не зависит от величины c_0 – стоимости элемента в начальный момент времени $t=0$. Средняя стоимость восстановлений от c_0 зависит.

Формулы для $HF_1F_2(t)$, $D(N(t))$ при вычислении дисперсии $D(C(t))$ по формуле (11) с экспоненциальным распределением имеются в [3,8,9].

При $F_2(t)=F_1(t), c_2=c_1$ формулы дисперсии стоимости восстановлений для общего процесса определяют дисперсии стоимости восстановлений при простом процессе

$$D(C(t))=c_0^2+(2c_1c_0+c_1^2)HF_1(t)+2c_1^2\int_0^t H\,F_1(t-x)dHF_1(x)-S^2F_1(t),$$

$$D(C(t))=c_1^2HF_1(t)+2c_1^2\int_0^t H\,F_1(t-x)dHF_1(x)-c_1^2H^2F_1(t),$$

$$D(C(t))=c_1^2D(N(t)).$$

В случае экспоненциального распределения ($F_1(t)=1-e^{-\alpha_1 t}$) $D(N(t))=\alpha_1 t$ и

$$D(C(t))=c_1^2\alpha_1 t. \quad (12)$$

Оптимизационные задачи

В процессе восстановления функции распределения наработок восстанавливаемых элементов определяют среднее число отказов, среднюю стоимость восстановлений и их дисперсии, и изменение функций распределения приводит к изменению указанных характеристик. В связи с этим дисперсиям придадим смысл риска, а средним – цены и качества, что приводит к оптимизационным задачам в терминах – цена, качество, риск.

Пусть для организации общего процесса восстановления при решении эксплуатационных задач имеется возможность выбора функции $F_1(t)$ из совокупности n функций распределения $F_{1,i}(t), i=1,2,\dots,n$, а для выбора $F_2(t)$ m функций распределения $F_{2,j}(t), j=1,2,\dots,m.$ Соответствующие стоимости $c_{1,i}, c_{2,j}$. Отметим, что момент времени $t=0$ представляет собой начало работы первого элемента. При этом среднее число отказов, средняя стоимость восстановлений и их дисперсии будут зависеть от выбранных функций распределения $F_{1,i}(t), F_{2,j}(t)$ и стоимостей $c_{1,i}, c_{2,j}$. Всех вариантов nm.

В этом случае возникают оптимизационные задачи, схожие по постановке с оптимизационными задачами Марковица по формированию портфеля ценных бумаг [10].

Например, требуется в периоде эксплуатации выбирать заменяемые элементы из возможных таким образом, чтобы на интервале от 0 до T при ограничениях на среднее число отказов (смысл – качество) и среднюю стоимость восстановлений (смысл – цена) – дисперсия (смысл – риск) стоимость восстановлений принимала наименьшее значение

$$min\,D(C(T)), \quad (13)$$

$$H(T)\le N, \quad (14)$$

$$S(T)\le K. \quad (15)$$

Заметим, что время T тоже может быть найдено.

Ряд оптимизационных задач, связанных со средним числом и дисперсией числа отказов рассмотрен в [8,9].

Рассмотрим задачу (13), (14), (15) при простом процессе восстановления с экспоненциальными распределениями наработок выбранных для замен заменяемых элементов: $F_{1,i}(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}, c_{1,i} = c_i, i = 1, \dots, n$.

В этом случае $H(T) = \alpha_i T$. В соответствии с (5), (12) $S(T) = c_0 + c_i\alpha_i T, D(C(T)) = c_i^2\alpha_i T$.

Задача (13), (14), (15) принимает вид

$$min\, c_i^2\alpha_i T, i = 1, \dots, n, \tag{16}$$

$$\alpha_i T \leq N, \tag{17}$$

$$c_0 + c_i\alpha_i T \leq K, c_0 < K. \tag{18}$$

Вначале выбираем те α_i, которые удовлетворяют условию (17) ($\alpha_i \leq \frac{N}{T}$). Пусть оно выполняется на первых l индексах из n. Теперь из произведений $c_i\alpha_i, i = 1, \dots, l$ берем наименьшее при котором выполняется условие (18), $c_i\alpha_i \leq K - c_0$. Пусть оно выполняется при индексе $i = i^*$. При этом индексе $i = i^*$ будет выполняться условие (16).

Получили, что для организации простого процесса восстановления с заданными выше условиями, следует выбирать элемент с функцией распределения $F_{1,i^*}(t) = 1 - e^{-\alpha_{i^*} t}$, со стоимостью при восстановлении c_{i^*}.

Отметим, если константы в задаче (16), (17), (18) таковы, что ни при каком индексе $i = 1, \dots, n$ нельзя удовлетворить условиям (17), (18), то рассматриваемая задача решений не имеет. В этом случае выполнение ограничений (17), (18) достигается путем уменьшения величины T.

Задача (16), (17), (18) на примере простого процесса восстановления в условиях распределения выбранных элементов по экспоненциальному закону, показывает корректность постановки рассматриваемых оптимизационных задач в вопросах существования решения.

Рассмотрим еще один класс оптимизационных задач. Пусть хотя бы одна из двух функций распределения, задающих общий процесс восстановления, является смесью n функций распределения

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(t), \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0,$$

Функции $F_i(t)$ заданы.

Плотности известных законов распределения в теории надежности не более чем одномодальные. Смесь функций распределений с одномодальными плотностями может иметь много модальную плотность [3]. Следует особо отметить, что таким свойством обладают случайные числовые характеристики вирусных заболеваний в связи с волновой динамикой развития заболевания.

Рассмотрим для указанного выше общего процесса восстановления еще одну из возможных оптимизационных задач в терминах цена, качество, риск.

Требуется определить числа $\lambda_i, i = 1,2, \dots, n$ из условий

$$min\, H(T),$$

$$S(T) \leq K,$$

$$D\big(N(T)\big) \leq D_1,$$

$$D\big(C(T)\big), \leq D_2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0.$$

Числа T, K, D_1, D_2 задаются. Выражения для $H(T), S(T), D\big(N(T)\big), D\big(C(T)\big)$ являются функциями от $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, и тем самым имеем задачу нелинейного программирования. В зависимости от реальных задач минимизировать нужно будет другие функции, а некоторые неравенства потребуется исключить.

Оптимизационные задачи еще можно расширить, например, по выбору оптимальных стратегий эксплуатации при провидении профилактических и аварийных восстановлений. Здесь критериями оптимизации могут быть интенсивность затрат или такой важный показатель в работе информационных систем как коэффициент готовности.

Представленные выше оптимизационные задачи даже для простого процесса, сформулированные в терминах цена, качество, риск для функций распределения характерных для теории надежности имеют практическое значение и вызывают самостоятельный интерес.

Зависимость среднего числа отказов, средней стоимости восстановлений и их дисперсий от функций распределения наработок заменяемых элементов позволяет рассматривать оптимизационные задачи обеспечения надежности технических и информационных систем, основанных на формулах Чебышева и коэффициента вариации.

Формула Чебышева для случайных величин стоимости восстановлений и числа отказов имеет вид

$$\begin{gathered} P(|C(t)-S(t)| \geq \epsilon) \leq \frac{D\big(C(t)\big)}{\epsilon^2}, \\ P(|N(t)-H(t)| \geq \epsilon) \leq \frac{D\big(N(t)\big)}{\epsilon^2}. \end{gathered} \tag{19}$$

Для простого процесса восстановления с экспоненциальным распределением наработок $F_1(t) = 1 - e^{-\alpha t}$

$$P(|C(t)-(c_0+c_1\alpha t)| \geq \epsilon) \leq \frac{c_1^2\alpha t}{\epsilon^2}, P(|N(t)-\alpha t| \geq \epsilon) \leq \frac{\alpha t}{\epsilon^2}.$$

Полагая в (19) $\epsilon = 3\sqrt{D(C(t))}, \epsilon = 3\sqrt{D(N(t))}$ после перехода к противоположным событиям, получаем

$$P\left(|C(t)-S(t)| < 3\sqrt{D(C(t))}\right) \geq \frac{8}{9}, P\left(|N(t)-H(t)| < 3\sqrt{D(N(t))}\right) \geq \frac{8}{9}.$$

Для простого процесса с экспоненциальным распределением наработок

$$P(|C(t)-(c_0+c_1\alpha t)| < 3c_1\sqrt{\alpha t}) \geq \frac{8}{9}, P(|N(t)-\alpha t| < 3\sqrt{\alpha t}) \geq \frac{8}{9}.$$

Приведенные формулы Чебышева дают возможность оценивать вероятности отклонения числа отказов и стоимости восстановлений от их средних значений через соответствующие им дисперсии на произвольном промежутке времени от начала процесса восстановления.

Запишем коэффициенты вариации для случайных величин стоимости восстановлений и числа отказов

$$V\big(N(t)\big) = \frac{H(t)}{\sigma\big(N(t)\big)}, V(C(t)) = \frac{S(t)}{\sigma(C(t))}$$

$\sigma\big(C(t)\big) = \sqrt{D\big(C(t)\big)},\ \sigma\big(N(t)\big) = \sqrt{D\big(N(t)\big)}$ - средние квадратические отклонения.

Таким образом, получим

$$V\big(N(t)\big) = \frac{H(t)}{\sigma\big(N(t)\big)} = \sqrt{\alpha t}, V\big(C(t)\big) = \frac{S(t)}{\sigma\big(C(t)\big)} = \frac{c_0 + c_1\alpha t}{c_1\sqrt{\alpha t}}.$$

Аналогично рассмотренным оптимизационным эксплуатационным задачам можно рассматривать задачу минимизации коэффициента вариации на заданном интервале времени. Здесь коэффициенту вариации можно придать смысл доли средней стоимости восстановлений или доли среднего числа отказов в соответствующих рисках в процессе восстановления при учете количества отказов и стоимостей восстановлений.

Заключение

При функционировании технических и информационных систем, а также систем защиты информации и средств обеспечения информационной безопасности в компьютерных системах и сетях на практике часто возникают непреднамеренные угрозы, носящие случайный характер. Это приводит к отказам, которые негативно сказываются на функционировании систем. Количество отказов и угроз вместе со стоимостью восстановлений представляют собой случайные величины, характеризующиеся различными моделям процессов восстановления.

Полученные в работе результаты продолжают исследование [8], связанное оптимизационными задачами в условиях «отрицательный доход», «риск».

Выведенные в данной работе формулы дисперсии стоимости восстановлений при простом и общем процессе позволяют рассматривать оптимизационные задачи уже в терминах цена, качество, риск. Дисперсии стоимости восстановлений придается смысл риска, что обеспечивает сходство по формулировке с оптимизационной задачей Марковица о формирования портфеля ценных бумаг.

Представлено решение задачи о формировании процесса восстановления в зависимости от функций распределения наработок до отказа заменяемых элементов при ограничениях на среднее число отказов и среднюю стоимость восстановлений на задаваемом промежутке времени от начала эксплуатации при котором дисперсия стоимости восстановлений была наименьшей для простого процесса с экспоненциальным распределением наработок.

Предложен класс оптимизационных задач в терминах цена, качество, риск о формировании процесса восстановления с функциями распределения в виде смеси задаваемых функций распределения.

В рамках рассмотренных задач выписаны формулы коэффициентов вариации и неравенства Чебышева для процессов восстановления и их представления для простого процесса при экспоненциальном распределении наработок.

Таким образом, полученные результаты актуальны в решении оптимизационных задач, возникающих при эксплуатации технических и информационных систем, систем защиты информации, средств обеспечения информационной безопасности в компьютерных системах и сетях в ситуациях возникновения угроз, носящих случайный, непреднамеренный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления. Советское радио. 1967.
2. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический

подход. Радио и связь. 1988.
3. Вайнштейн И.И. Процессы и стратегии восстановления с изменяющимися функциями распределения в теории надежности. СФУ. 2016.
4. Боровков А.А. Теория вероятностей. Либроком. 2009.
5. Вайнштейн И.И., Шмидт О.О. Процессы восстановления с учетом стоимости восстановлений. *Вопросы математического анализа*. ИПЦ КГТУ. 2007.
6. Вайнштейн И.И., Вайнштейн В.И., Вейсов Е.А. О моделях процессов восстановления в теории надежности. *Вопросы математического анализа*. 2003;6:78-84.
7. Булинская Е.В., Соколова А.И. Асимптотическое поведение некоторых стохастических систем хранения. *Современные проблемы математики и механики*. 2015;10(3):37-62.
8. Вайнштейн И.И., Вайнштейн В.И. Дисперсия числа отказов в моделях процессов восстановления технических и информационных систем. Оптимизационные задачи. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2019;7(3). Доступно по: https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2019/09/VainshteinVainshtein_3_19_1.pdf DOI: 10.26102/2310-6018/2019.26.3 (дата обращения: 12.02.2021).
9. Вайнштейн В.И. Дисперсия числа отказов в процессах восстановления. Надежность. 2019;19(4):12-16. Доступно по: https://www.dependability.ru/jour/article/view/343 DOI: 10.21683/1729-2646-2019-19-4-12-16 (дата обращения: 12.02.2021).
10. Markowits H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*. 1952;7(1):71-91.

REFERENCES

1. Koks D.R., Smit V.L. Teoriya vosstanovleniya. Sovetskoe radio. 1967. (In Russ).
2. Baikhel't F., Franken P. Nadezhnost' i tekhnicheskoe obsluzhivanie. Matematicheskii podkhod. Radio i svyaz'. 1988. (In Russ).
3. Vainshtein I.I. Protsessy i strategii vosstanovleniya s izmenyayushchimisya funktsiyami raspredeleniya v teorii nadezhnosti. SFU. 2016. (In Russ).
4. Borovkov A.A. Teoriya veroyatnostei. Librokom. 2009. (In Russ).
5. Vainshtein I.I. Shmidt O.O. Protsessy vostanovleniya s uchetom stoimosti vosstanovlenii. IPTs KGTU. 2007. (In Russ).
6. Vainshtein I.I., Vainshtein V.I. Veisov E.A. O modelyakh protsessov vosstanovleniya v teorii nadezhnosti. *Voprosy matematicheskogo analiza*. IPTs KGTU. 2003;6:78-84. (In Russ).
7. Bulinskaya E.V., Sokolova A.I. Asimptoticheskoe povedenie nekotorykh stokhasticheskikh sistem khraneniya. *Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki*. 2015;10(3):37-62. (In Russ).
8. Vainshtein I.I., Vainshtein V.I. Dispersion of the number of failures in models of processes of recovery of technical and information systems. Optimization problems. *Modeling, optimization and information technology*. 2019;7(3). Available at: https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2019/09/VainshteinVainshtein_3_19_1.pdf DOI: 10.26102/2310-6018/2019.26.3 (accessed 12.02.2021).
9. Vainshtein V.I. Dispersion of the number of failures in recovery processes. *Dependability*. 2019;19(4):12-16. Available at: https://www.dependability.ru/jour/article/view/343 DOI: 10.21683/1729-2646-2019-19-4-12-16 (accessed 12.02.2021).
10. Markowits H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*. 1952;7(1):71-91.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Вайнштейн Виталий Исаакович, кандидат физико-математических наук, доцент ФГАО ВО «Сибирский федеральный университет», Красноярск, Российская федерация.
e-mail: vvaynshtyayn@sfu-kras.ru
ORCID: 0000-0002-7708-9328

Vitaly Isaakovich Vainshtein, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor Siberian federal university, Krasnoyarsk, Russian Federation