

УДК: 519.63

DOI: [10.26102/2310-6018/2023.43.4.010](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2023.43.4.010)

Решение задачи переноса сплошной среды по сетевому носителю в символьном виде

М.А. Рыбаков 

*Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, Тамбов,
Российская Федерация*

Резюме. При исследовании эволюционных процессов переноса сплошной среды по сетевым носителям основное внимание уделяется вопросам существования и приближенного нахождения решений начально-краевых задач для дифференциальных систем уравнений, формализмами которых описываются математические модели указанных процессов. В инженерной практике такие модели, как правило, считаются линейными, либо допускают линеаризацию (классический пример – линеаризованные системы Навье-Стокса). Центральная идея, базирующаяся на использовании инструментов теории символьной математики и определившая весь стиль данной работы, предопределяет осмысление закономерностей явлений переноса в местах ветвления (узловых местах) носителя процесса и последующее математическое описание таких явлений в терминах дифференциальных или иных соотношений. В работе представлена математическая модель эволюционного сетеподобного процесса переноса сплошной среды (линейная дифференциальная система) и соответствующая ей дифференциально-разностная система, полученная полудискретизацией дифференциальной системы по временной переменной. Для доказательства разрешимости последней и фактического определения приближений решения исходной дифференциальной системы используются методы символьной математики. При этом предлагается и обосновывается алгоритм нахождения символьно-численного решения дифференциально-разностной системы и приближений решений начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды. В основе алгоритма лежит аппроксимация частной производной по временной переменной разностным отношением (используется двухслойная аппроксимационная схема) и последующее применение преобразования Лапласа к полученной дифференциально-разностной системе. Представлена блок-схема алгоритма, приведено описание структуры программного комплекса на основе разработанного алгоритма. Программный комплекс разработан на языке программирования Java. Для ввода исходных данных начально-краевой задачи и вывода решения используется веб-интерфейс программного комплекса на основе фреймворка Spring. Для иллюстрации работы программного комплекса рассматривается пример решения начально-краевой задачи с пошаговой демонстрацией результатов расчетов. Представляемый метод может использоваться в анализе прикладных задач сетевой гидродинамики, теплотехники, а также анализе диффузионных процессов биофизики.

Ключевые слова: сетеподобная область, граф, уравнение переноса сплошной среды, начально-краевая задача, дифференциально-разностная система, преобразование Лапласа, алгоритм символьно-численного решения.

Для цитирования: Рыбаков М.А. Решение задачи переноса сплошной среды по сетевому носителю в символьном виде. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2023;11(4). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1451> DOI: 10.26102/2310-6018/2023.43.4.010

Solving the problem of transferring a continuous medium over a network medium in symbolic form

M.A. Rybakov✉

Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation

Abstract. When studying the evolutionary processes of transferring a continuous medium over network media, special emphasis is placed on the issues of the existence and approximate finding of solutions to initial boundary value problems for differential systems of equations, the formalisms of which describe mathematical models of these processes. In engineering practice, such models are usually considered linear or allow linearization (a classic example is linearized Navier-Stokes systems). The core idea is based on the use of symbolic mathematics theory tools which determined the entire direction of the research; it predetermines the understanding of the transfer phenomena patterns in the branching places (nodal places) of the process carrier and the subsequent mathematical description of such phenomena in terms of differential or other relationships. The paper presents a mathematical model of an evolutionary network-like process of continuum transfer (linear differential system) and its corresponding differential-difference system obtained by semi-sampling the differential system with respect to a time variable. To prove the solvability of the latter and empirically determine the approximations of the solution to the original differential system, methods of symbolic mathematics are used. At the same time, an algorithm for finding a symbolic-numerical solution to a differential-difference system and approximations of solutions to the initial boundary value problem for the continuum transport equation are proposed and validated. The algorithm is based on the approximation of the partial derivative with respect to a time variable by a difference ratio (a two-layer approximation scheme is utilized) and the subsequent application of the Laplace transform to the resulting differential-difference system. A block diagram of the algorithm is presented; a description of the software complex structure based on the developed algorithm is given. The software package is developed using the Java programming language. To upload the initial data of the initial-boundary value problem and output the solution, the web interface of the software package based on the Spring framework is used. To illustrate the operation of the software package, an example of solving an initial-boundary value problem is considered with a step-by-step demonstration of the calculation results. The presented method can be used in the analysis of applied problems of network hydrodynamics, heat engineering, as well as the analysis of diffusion processes in biophysics.

Keywords: network-like domain, graph, continuum transport equation, initial-boundary value problem, differential-difference system, Laplace transform, symbolic-numerical solution algorithm.

For citation: Rybakov M.A. Solving the problem of transferring a continuous medium over a network medium in symbolic form. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2023;11(4). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1451> DOI: 10.26102/2310-6018/2023.43.4.010 (In Russ.).

Введение

Для нахождения решений дифференциальных уравнений в частных производных имеется широкий набор эффективных численных методов [1]. Методы символьного решения разработаны в меньшей степени, соответственно, в современных пакетах систем компьютерной алгебры мало представлены программы, позволяющие получать в аналитическом виде приближенные решения краевых задач для различных классов уравнений в частных производных [2]. А программные средства для нахождения символьного решения дифференциальных уравнений в частных производных на графах и вовсе отсутствуют в таких пакетах. В то же время соответствующие программные средства востребованы для исследования ряда инженерных задач, задач математической физики, химической физики [3-5] и др. Таким образом, актуальной задачей компьютерной алгебры является разработка алгоритмов символьного решения

уравнений в частных производных на графах, в частности, уравнения переноса сплошной среды по сетевому носителю.

Целью данной работы является разработка и программная реализация алгоритма нахождения решения задачи переноса сплошной среды по сетевому носителю в символьном виде.

Статья разделена на четыре параграфа. В первом параграфе приводятся необходимые сведения об ориентированном графе-дереве и формулируется начально-краевая задача переноса сплошной среды по сетевому носителю. Во втором параграфе рассматриваемая начально-краевая задача аппроксимируется системой дифференциально-разностных уравнений и предлагается алгоритм символьного решения полученной системы. В третьем параграфе представлен разработанный на основе этого алгоритма программный комплекс решения начально-краевой задачи переноса сплошной среды по сетевому носителю. В четвертом параграфе представлены результаты решения конкретной начально-краевой задачи. Проведенный вычислительный эксперимент подтверждает эффективность разработанного программного комплекса.

Постановка задачи

В начале приведем используемые в работе известные сведения о графах [6]. Рассмотрим произвольный граф-дерево Γ (Рисунок 1), который содержит n узлов и, следовательно, $n - 1$ ребро. Обозначим через r_i – степень i -го узла. Если узел внутренний, то его степень $r_i \geq 3$. Если узел внешний, то его степень равна 1. Пусть количество внутренних узлов равно m , и соответственно количество внешних узлов равно $n - m$. Обозначим через $r = \sum_{i=1}^m r_i$ – сумму степеней всех внешних узлов. Тогда сумма степеней всех внутренних и внешних узлов будет равна $r + (n - m)$. Так как каждое ребро определяется двумя узлами, то сумма всех степеней всех узлов в 2 раза больше, чем количество ребер. Таким образом,

$$r + n - m = 2(n - 1) \tag{1}$$

Следовательно, $r = n + m - 2$.

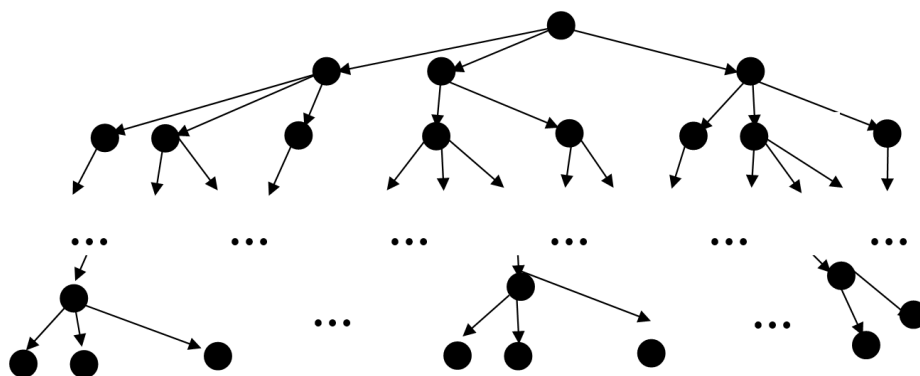


Рисунок 1 – Граф-дерево Γ
 Figure 1 – Tree graph G

Рассмотрим произвольный i -ый внутренний узел графа Γ . Пусть к этому внутреннему узлу примыкает $r_i = l_i + 1$ ребер, одно из которых ориентировано к узлу, и l_i ребер – от узла. Обозначим через γ_0 ребро, ориентированное к этому узлу, через γ_j (где

$j = \overline{1, l_i}$) – ребра, ориентированные от узла. Каждое ребро графа Γ параметризуем отрезком $[0, 1]$.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения переноса сплошной среды – уравнения параболического типа с заданными постоянными коэффициентами a, b, c , в области $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$ с границей $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times [0, T]$. Эта задача определяется уравнением параболического типа с заданными постоянными коэффициентами a, b, c :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + cu(x,t), \text{ где } (x,t) \in \Gamma_T, \quad (2)$$

условиями согласования в каждом i -ом ($i = \overline{1, m}$) внутреннем узле графа Γ :

$$u(x,t)|_{x=1 \in \gamma_0} = u(x,t)|_{x=0 \in \gamma_j}, \quad j = \overline{1, l_i}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_0} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_j}, \quad j = \overline{1, l_i}, \quad (4)$$

а также, начальным

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x) \quad (5)$$

и граничным

$$u(x,t)|_{x \in \partial\Gamma} = 0 \quad (6)$$

условиями. Здесь $\alpha_j > 0$ ($j = \overline{1, l_i}, i = \overline{1, m}$) – заданные постоянные, функция $\varphi(x)$ задана и удовлетворяет условиям (3), (4) и (6).

В работах [7, 8] представлены условия разрешимости начально-краевых задач вида (2) – (6) в различных классах функций. Для постоянных коэффициентов a, b, c в уравнении (2) указанная задача однозначно разрешима в классе достаточно гладких функций.

Алгоритм решения задачи

Алгоритм решения состоит из трех этапов:

1-й этап. Редукция дифференциального уравнения (2) к дифференциально-разностной системе.

Разобьем отрезок $[0, T]$ на N отрезков $[(k-1)\tau, k\tau]$, $k = \overline{1, N}$, $\tau = 1/N$ и аппроксимируем производную $\frac{du(x,t)}{dt}$ конечной разностью первого порядка. Обозначим $u(k) = u(x, k\tau)$. Отметим, что функции $u(k)$ и $u(x, t)$, вообще говоря, разные: обозначение $u(k)$, $k = \overline{1, N}$ понимается как значение $u(x, k\tau)$ отображения $t = k\tau \in (0, T) \mapsto u(x, t)$ в классе дважды непрерывно дифференцируемых по x функций.

Уравнению (2) будет соответствовать дифференциально-разностная система вида:

$$\frac{1}{\tau} [u(k) - u(k-1)] = a \frac{d^2 u(k)}{dx^2} + b \frac{du(k)}{dx} + cu(k), \quad x \in \Gamma, \quad k = \overline{1, N}, \quad u(0) = \varphi(x). \quad (7)$$

Из условия (3) для каждого внутреннего i -го узла получаем соответствующие условия (их количество равно $l_i = r_i - 1$) на функцию $u(k)$:

$$u(k)|_{x=1 \in \gamma_0} = u(k)|_{x=0 \in \gamma_j}, \quad k = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, l_i}. \quad (8)$$

А из условия (4) получаем:

$$\frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=1 \in \gamma_0} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=0 \in \gamma_j}, \quad k = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, l_i}, \quad (9)$$

где $\alpha_j > 0$ ($j = \overline{1, l_i}$) – заданные постоянные.

Отметим, что в каждом внутреннем узле функция $u(k)$ должна удовлетворять условиям (8) и (9), и количество этих условий $l_i + 1 = r_i$ совпадет со степенью внутреннего узла. А в каждом внешнем узле функция $u(k)$ должна удовлетворять одному из следующих краевых условий, в зависимости от того, ориентировано ли ребро γ_0 к узлу или от узла:

$$u(k)|_{x=1 \in \gamma_0} = 0 \text{ или } u(k)|_{x=0 \in \gamma_0} = 0, \quad (10)$$

то есть количество условий также совпадает со степенью узла. Таким образом, общее количество условий (8), (9) и (10) во всех узлах равно $r + (n - m)$ – сумме степеней всех внутренних и внешних узлов.

2-й этап. Решение системы (7)-(10) при каждом $k = \overline{1, N}$.

Для нахождения решения $u(k)$ линейного дифференциального уравнения второго порядка (7) введем произвольные постоянные α_{ij}, β_{ij} и будем полагать, что выполнены условия:

$$u(k)|_{x=0 \in \gamma_j} = \alpha_{ij}, \quad \left. \frac{du(k)}{dx} \right|_{x=0 \in \gamma_j} = \beta_{ij}, \quad j = \overline{0, l_i}. \quad (11)$$

На каждом ребре $\gamma_j, j = \overline{0, l_i}$, решение $u(k)$ задачи Коши (7), (11) будем находить последовательно при каждом $k = \overline{1, N}$, используя основанный на преобразовании Лапласа метод символьной математики (далее, метод СМ). Предлагаемый алгоритм определения $u(k)$ включает следующие шаги.

Для $k = 1$ записываем задачу (7), (11) относительно неизвестной функции $u(1)$ в виде:

$$\frac{1}{\tau} [u(1) - \varphi(x)] = a \frac{d^2 u(1)}{dx^2} + b \frac{du(1)}{dx} + cu(1), \quad (12)$$

$$u(1)|_{x=0 \in \gamma_j} = \alpha_{ij}, \quad \left. \frac{du(1)}{dx} \right|_{x=0 \in \gamma_j} = \beta_{ij}. \quad (13)$$

Методом СМ будет получено точное решение $u(1) = u(x, 1)$ этой задачи в аналитическом виде:

$$u(1) = \alpha_{ij} U_1(x) + \beta_{ij} U_2(x) + U(x), \quad (14)$$

где $(U_1(x), U_2(x))$ – фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного уравнения, а $U(x)$ – частное решение неоднородного уравнения.

Для нахождения коэффициентов α_{ij}, β_{ij} подставим функцию $u(1)$ в условия (8), (9). Получим систему, состоящую из $r + (n - m) = 2(n - 1)$ линейных алгебраических уравнений, поскольку, как установлено выше, именно таково общее количество условий (8), (9) для каждого фиксированного k . Количество неизвестных чисел α_{ij} совпадает с количеством ребер графа, т. е. равно $(n - 1)$. Такое же количество неизвестных чисел β_{ij} . Таким образом, в рассматриваемой системе будет $2(n - 1)$ неизвестных, и матрица этой системы квадратная размерности $2(n - 1) \times 2(n - 1)$. Обозначим эту матрицу символом A и отметим, что для существования и единственности искомого набора коэффициентов $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, j = \overline{1, l_i}, i = \overline{1, m}$ необходимо и достаточно, чтобы матрица $A_{2(n-1) \times 2(n-1)}$ была невырожденной, т. е. $\det A \neq 0$. Таким образом, задача (12), (13) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Для решения системы линейных алгебраических уравнений используется метод СМ, основанный на методе Гаусса. Найденные значения коэффициентов α_{ij}, β_{ij} подставим в формулу (14) и получим функцию $u(1)$ – решение задачи (12), (13).

Для каждого следующего $k = \overline{2, N}$ определенная на предыдущем этапе функция $u(k-1)$, $x \in \Gamma$, подставляется в уравнение (7), и для полученного уравнения повторяются все описанные выше для $k = 1$ шаги 2-го этапа алгоритма.

После выполнения последнего N -го шага 2-й этап закончен, в результате получен набор функций $u(k)$, $x \in \Gamma$, $k = \overline{0, N}$.

3-й этап. *Представление решения исходной системы (2)-(6).*

Решение исходной начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды определяется кусочно-постоянными по временной переменной t интерполяциями через найденные на 2-м этапе функции $u(k)$, $k = \overline{1, N}$. Результатом 3-го этапа является приближенное решение $u(x, t)$, представляющее собой функцию, дважды непрерывно дифференцируемую по $x \in \Gamma$ и кусочно-постоянную по $t \in [0, T]$.

Описание программного комплекса

Для решения задачи переноса сплошной среды по сетевому носителю в символьном виде разработан программный комплекс, который включает в себя программный модуль для символьного решения систем линейных дифференциальных уравнений и расчета динамических характеристик систем автоматического управления, а также программный модуль для решения системы дифференциально-разностных уравнений и программный модуль для решения задач переноса сплошной среды по сетевому носителю в символьном виде.

Описание программного модуля и результаты его использования для символьного решения некоторых конкретных систем линейных дифференциальных уравнений и расчета динамических характеристик некоторых конкретных систем автоматического управления представлены в статьях [9-11].

Программный модуль для решения задач переноса сплошной среды по сетевому носителю в символьном виде состоит из программного класса *SystemLDEGRAPH*, который включает в себя методы, предназначенные для решения системы дифференциально-разностных уравнений.

Пример решения задачи

Рассмотрим простейший случай графа-дерево – граф-звезду Γ с внутренним узлом ξ и тремя ребрами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (Рисунок 2). Каждое ребро параметризуем отрезком $[0, 1]$.

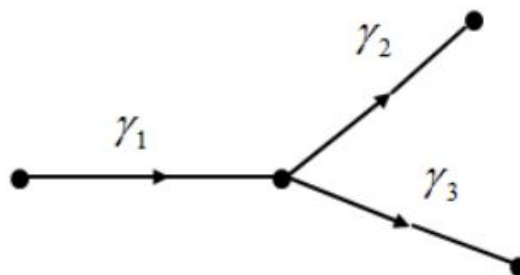


Рисунок 2 – Граф-звезда Γ
 Figure 2 – Star graph G

Получим на основании предложенного выше алгоритма решение начально-краевой задачи в области $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$ с границей $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times [0, T]$ методом СМ:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t), \text{ где } (x, t) \in \Gamma_T, \quad (15)$$

$$u(x, t)|_{x=1 \in \gamma_1} = u(x, t)|_{x=0 \in \gamma_2} = u(x, t)|_{x=0 \in \gamma_3},$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_1} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_2} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_3}, \quad (16)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad (17)$$

$$u(x, t)|_{x=0 \in \gamma_1} = u(x, t)|_{x=1 \in \gamma_2} = u(x, t)|_{x=1 \in \gamma_3} = 0. \quad (18)$$

Начальную функцию $\varphi(x)$ задаем в виде:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \in \gamma_1, \\ x^2 - 1, & x \in \gamma_2, \\ x^2 - 1, & x \in \gamma_3. \end{cases}$$

Отметим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет шести условиям (16) и (18).

1-й этап. Редукция дифференциального уравнения (15) к дифференциально-разностной системе.

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на $N = 10$ элементарных отрезков $[(k-1)\tau, k\tau]$, $k = \overline{1, 10}$, $\tau = 1/10$ и запишем соответствующую уравнению (15) дифференциально-разностную систему:

$$\frac{1}{0.1} [u(k) - u(k-1)] = 9 \frac{d^2 u(k)}{dx^2} + u(k), \text{ где } x \in \Gamma, k = \overline{1, 10}, u(0) = \varphi(x). \quad (19)$$

Условию (16) при $k = \overline{1, 10}$ будет соответствовать следующее условие:

$$u(k)|_{x=1 \in \gamma_1} = u(k)|_{x=0 \in \gamma_2} = u(k)|_{x=0 \in \gamma_3},$$

$$\frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=1 \in \gamma_1} = \frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=0 \in \gamma_2} + \frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=0 \in \gamma_3}. \quad (20)$$

Условию (18) при $k = \overline{1, 10}$ будет соответствовать следующее условие:

$$u(k)|_{x=0 \in \gamma_1} = u(k)|_{x=1 \in \gamma_2} = u(k)|_{x=1 \in \gamma_3} = 0. \quad (21)$$

2-й этап. Решение системы (19) при $x \in \Gamma$ т. е. на каждом ребре $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Уравнение (19) при $k = 1$ на каждом ребре будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{0.1} [u(1) - u(0)] = 9 \frac{d^2 u(1)}{dx^2} + u(1), \quad x \in \Gamma.$$

Для нахождения решения $u(1)$ на каждом ребре $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ введем произвольные постоянные α_j, β_j и будем полагать, что выполнены условия:

$$u(1)|_{x=0 \in \gamma_j} = \alpha_j, \quad \frac{du(1)}{dx} \Big|_{x=0 \in \gamma_j} = \beta_j, \quad j = \overline{1, 3},$$

при этом, исходя из условия (21) для ребра γ_1 получаем следующее равенство $u(1)|_{x=0 \in \gamma_1} = 0$, отсюда получаем, что $\alpha_1 = 0$. Решение системы (19) осуществляется последовательно на каждом ребре $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ с использованием метода СМ.

Таким образом, будет построена функция $u(1)$ с параметрами $\beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$. Параметры $\beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ будут определены в результате решения линейной алгебраической системы, полученной из трех уравнений (20) и двух уравнений (21) (первое уравнение в (21) выполнено автоматически). В результате работы процедуры решения алгебраической системы будет получена функция $u(1)$, $x \in \Gamma$.

Для каждого следующего $k = \overline{2, 10}$ определенная на предыдущем этапе функция $u(k-1)$, $x \in \Gamma$, подставляется в уравнение (19) и для полученного уравнения повторяются все описанные выше для $k = 1$ шаги 2-го этапа алгоритма.

Рассмотрим решение дифференциально-разностной системы (19) с условиями (20)-(21), где $k = \overline{1,10}$. В результате, получим набор функций $u(k)$, $k = \overline{1,10}$. При этом для каждого фиксированного $k = \overline{1,10}$ будет работать ЭВМ-программа, состоящая из трех блоков, реализующих три этапа работы алгоритма, в основе работы каждого из этих блоков лежат процедуры символьной математики, в совокупности формирующие метод СМ: 1) блок определения решения дифференциальной системы (19), зависящего от определенного числа параметров, 2) блок определения параметров как решение системы линейных алгебраических уравнений и 3) блок формирования решения дифференциально-разностной системы (19)-(21) и, как следствие, формирования приближений решения дифференциальной системы (15)-(18) по полученным данным – кусочно-постоянных интерполяций по временной переменной.

Рассмотрим работу программного комплекса детально для $k = 1$.

Работа блока № 1:

Уравнение (19) при $k = 1$ на каждом ребре будет иметь следующий вид:

$$10(u(1) - u(0)) = 9 \frac{d^2 u(1)}{dx^2} + u(1) \rightarrow 9 \frac{d^2 u(1)}{dx^2} - 9u(1) = -10u(0).$$

Функция $u(0)$ на ребре γ_1 имеет вид: $u(0) = x^2 - 2x$. Начальные условия на ребре γ_1 : $u(1)|_{x=0 \in \gamma_1} = 0, \frac{du(1)}{dx}|_{x=0 \in \gamma_1} = \beta_1$.

После применения метода СМ для решения дифференциального уравнений 2-ого порядка получаем решение на ребре γ_1 :

$$u(1) = 2.2 - 2.2x + 1.1x^2 + 0.5\beta_1 e^x - 2.2e^{-x} - 0.5\beta_1 e^{-x}.$$

Функция $u(0)$ на ребре γ_2 имеет вид: $u(0) = x^2 - 1$. Начальные условия на ребре γ_2 : $u(1)|_{x=0 \in \gamma_2} = \alpha_2, \frac{du(1)}{dx}|_{x=0 \in \gamma_2} = \beta_2$.

После применения метода СМ для решения дифференциального уравнения 2-ого порядка получаем решение на ребре γ_2 :

$$u(1) = 1.1 + 1.1x^2 + 0.5\alpha_2 e^{-x} - 0.6e^{-x} - 0.5\beta_2 e^{-x} + 0.5\beta_2 e^x + 0.5\alpha_2 e^x - 0.6e^x.$$

Функция $u(0)$ на ребре γ_3 имеет вид: $u(0) = x^2 - 1$. Начальные условия на ребре γ_3 : $u(1)|_{x=0 \in \gamma_3} = \alpha_3, \frac{du(1)}{dx}|_{x=0 \in \gamma_3} = \beta_3$.

После применения метода СМ для решения дифференциального уравнения 2-ого порядка получаем решение на ребре γ_3 :

$$u(1) = 1.1 + 1.1x^2 + 0.5\alpha_2 e^{-x} - 0.6e^{-x} - 0.5\beta_2 e^{-x} + 0.5\beta_2 e^x + 0.5\alpha_2 e^x - 0.6e^x.$$

Таким образом, построена функция $u(1)$, $x \in \Gamma$ (т.е. на $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) с пятью параметрами: $\beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$, которые являются неизвестными, определяемыми как решение системы линейных алгебраических уравнений (22).

Работа блока № 2:

Составим систему линейных алгебраических уравнений (22), исходя из значений функции $u(1)$, $x \in \Gamma$ (т. е. на $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$):

$$\left\{ \begin{array}{l} u(1)|_{x=1 \in \gamma_1} = u(1)|_{x=0 \in \gamma_2} \\ u(1)|_{x=0 \in \gamma_2} = u(1)|_{x=0 \in \gamma_3} \\ \frac{du(1)}{dx}|_{x=1 \in \gamma_1} = \frac{du(1)}{dx}|_{x=0 \in \gamma_2} + \frac{du(1)}{dx}|_{x=0 \in \gamma_3} \Rightarrow \\ u(1)|_{x=1 \in \gamma_2} = 0 \\ u(1)|_{x=1 \in \gamma_3} = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 0.3 + 1.2 b_1 = a_2 \\ a_2 = a_3 \\ 0.8 + 1.5 b_1 = b_2 + b_3 \\ 0.5 + 1.2 b_2 + 1.5 a_2 = 0 \\ 0.5 + 1.2 b_3 + 1.5 a_3 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

В результате решения системы (22) получаем следующие значения параметров:

$$\beta_1 = -0.5, \alpha_2 = -0.3, \beta_2 = 0, \alpha_3 = -0.3, \beta_3 = 0.$$

После подстановки в выражение для функции $u(1)$, $x \in \Gamma$ найденных параметров $\beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ получаем решение:

$$u(1)|_{x \in \gamma_1} = 2.2 - 2.2x + 1.1x^2 - 0.3e^x - 2.0e^{-x}.$$

$$u(1)|_{x \in \gamma_2} = 1.1 + 1.1x^2 - 0.7e^{-x} - 0.7e^x.$$

$$u(1)|_{x \in \gamma_3} = 1.1 + 1.1x^2 - 0.7e^{-x} - 0.7e^x.$$

Для остальных $k = \overline{2,10}$ функции $u(k)$, $x \in \Gamma$ на ребрах $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ будут иметь следующий вид:

$$u(10)|_{x \in \gamma_1} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 e^x + a_4 x e^x + a_5 x^2 e^x + a_6 x^3 e^x + a_7 x^4 e^x + a_8 e^{-x} + a_9 x e^{-x} + a_{10} x^2 e^{-x} + a_{11} x^3 e^{-x} + a_{12} x^4 e^{-x},$$

где $\alpha_i \in R (i = \overline{0,12})$.

Значения коэффициентов $\alpha_i \in R (i = \overline{0,12})$ для функций $u(k)$, $k = \overline{2,10}$ на ребре γ_1 представлены в Таблице 1.

Таблица 1 – Значения коэффициентов α_i для функций $u(k)$ на ребре γ_1
Table 1 – Values of the coefficients α_i for the functions $u(k)$ on the edge γ_1

k	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
2	4.9	-2.5	1.2	-0.9	0.2	0	0	0	-4.1	-1.1	0	0	0
3	8.2	-2.8	1.4	-1.7	0.5	-0.1	0	0	-6.5	-2.6	-0.3	0	0
4	12.2	-3.1	1.5	-2.9	1.1	-0.2	0	0	-9.3	-4.4	-0.8	-0.1	0
5	16.9	-3.4	1.7	-4.5	2.0	-0.4	0	0	-12.5	-6.6	-1.5	-0.2	0
6	22.6	-3.8	1.9	-6.4	3.2	-0.7	0.1	0	-16.2	-9.3	-2.3	-0.3	0
7	29.3	-4.2	2.1	-8.7	4.6	-1.1	0.2	0	-20.6	-12.4	-3.4	-0.5	-0.1
8	37.2	-4.7	2.3	-11.5	6.5	-1.7	0.3	0	-25.7	-16.1	-4.7	-0.8	-0.1
9	46.5	-5.2	2.6	-14.8	8.8	-2.4	0.4	0	-31.7	-20.5	-6.2	-1.2	-0.1
10	57.4	-5.7	2.9	-18.8	11.5	-3.3	0.6	0.1	-38.6	-25.6	-8.0	-1.6	-0.2

Значения коэффициентов $\alpha_i \in R (i = \overline{0,12})$ для функций $u(k)$, $k = \overline{2,10}$ на ребрах γ_2 и γ_3 представлены в Таблице 2.

Таблица 2 – Значения коэффициентов α_i для функций $u(k)$ на ребре γ_2 и γ_3
Table 2 – Values of the coefficients α_i for the functions $u(k)$ on the edge γ_2 and γ_3

k	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
2	3.7	0	1.2	-1.9	0.4	0	0	0	-1.9	-0.4	0	0	0
3	6.9	0	1.4	-3.5	1.2	-0.1	0	0	-3.5	-1.2	-0.1	0	0
4	10.7	0	1.5	-5.3	2.3	-0.4	0	0	-5.3	-2.3	-0.4	0	0
5	15.2	0	1.7	-7.6	3.7	-0.7	0.1	0	-7.6	-3.7	-0.7	-0.1	0

Таблица 2 (продолжение)
Table 2 (extended)

k	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
6	20.7	0	1.9	-10.4	5.5	-1.3	0.2	0	-10.4	-5.5	-1.3	-0.2	0
7	27.2	0	2.1	-13.6	7.7	-2.0	0.3	0	-13.6	-7.7	-2.0	-0.3	0
8	34.9	0	2.3	-17.4	10.4	-2.8	0.5	-0.1	-17.4	-10.4	-2.8	-0.5	-0.1
9	43.9	0	2.6	-21.9	13.6	-3.9	0.7	-0.1	-21.9	-13.6	-3.9	-0.7	-0.1
10	54.5	0	2.9	-27.3	17.4	-5.2	1.0	-0.1	-27.3	-17.4	-5.2	-1.0	-0.1

3-й этап. Представление решения системы (15) при $x \in \Gamma$.

Работа блока № 3:

Найденные в программе функции $u(k)$ являются приближенными значениями решения $u(x, t)$ начально-краевой задачи (15)-(18) в точках $t_k, k = 1, \dots, 10$. Аналитически вид функции $u(x, t)$ можно получить, например, используя известные интерполяционные формулы. В частности, в случае линейной интерполяции получаем:

$$u(x, t) = \frac{u(k) - u(k-1)}{\tau} (t - t_{k-1}) + u(k-1), k = \overline{1, 10}, t \in (t_{k-1}, t_k].$$

Для получения более гладких аппроксимаций можно воспользоваться интерполяционным многочленом Лагранжа 10-ой степени, в этом случае получим:

$$u(x, t) = \sum_{k=0, \overline{10}} \frac{u(k) \prod_{i=0, \overline{10}, j \neq i} (t - t_j)}{\prod_{i=0, \overline{10}, j \neq i} (t_i - t_j)}, t \in [0, 1].$$

Заключение

В дальнейшем возможности представленного программного комплекса будут расширены, и появится возможность решения начально-краевых задач с пространственной переменной, изменяющейся в n -мерной сетеподобной области.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы математической физики*. М.: Научный мир; 2000. 315 с.
2. Кулябов Д.С., Кокотчикова М.Г. Аналитический обзор систем символьных вычислений. *Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика*. 2007;(1-2):38–45.
3. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*. М.: ФИЗМАТЛИТ; 2004. 272 с.
4. Свиридюк Г.А., Шеметова В.В. Уравнения Хоффа на графах. *Дифференц. уравнения*. 2006;42;(1):126–131.
5. Вольперт А.И., Худяев С.И. *Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики*. М.: Наука; 1975. 395 с.
6. Карпов Д.В. *Теория графов*. СПб.: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН Санкт-Петербургское отделение; 2021. 559 с.
7. Провоторов В.В. К вопросу построения граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы «мачта-растяжки». *Системы управления и информационные технологии*. 2008;32(2.2):293–297.

8. Zhabko A.P., Shindyapin A.I., Provotorov V.V. Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes.* 2019;15(4):457–471. DOI: 10.21638/11702/spbu10.2019.404.
9. Малашонок Н.А, Рыбаков М.А. Символьно-численное решение систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с требуемой точностью. *Журнал “Программирование” РАН.* 2013;3:38–46.
10. Малашонок Г.И., Рыбаков М.А. Решение систем линейных дифференциальных уравнений и расчет динамических характеристик систем управления в веб-сервисе MathPartner. *Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки.* 2014;19(2):517–529.
11. Рыбаков М.А. О нахождении общего и частного решений неоднородной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. *Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки.* 2012;17(2):552–565.

REFERENCES

1. Samarskiy A.A., Gulin A.V. *Numerical methods of mathematical physics.* Moscow, Nauchnyi mir; 2000. 315 p. (In Russ.).
2. Kulyabov D.S., Kokotchkova M.G. Analytical review of symbolic computing systems. *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika = Bulletin of the RUDN, Mathematics Series. Computer science. Physics.* 2007;(1-2):38–45.
3. Pokorniy Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L., etc. *Differential equations on geometric graphs.* Moscow, FIZMATLIT; 2004. 272 p. (In Russ.).
4. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. Hoff equations on graphs. *Differents. uravneniya = Differents. equations.* 2006;42;(1):126–131. (In Russ.).
5. Volpert A.I., Khudyaev S.I. *Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics.* Moscow, Nauka; 1975. 395 p. (In Russ.).
6. Karpov D.V. *Graph Theory.* St. Petersburg: V.A. Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Branch; 2021. 559 p. (In Russ.).
7. Provotorov V.V. On the issue of constructing boundary controls in the problem of damping vibrations of the "mast-stretching" system. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii = Management systems and information technologies.* 2008;32 (2.2):293–297. (In Russ.).
8. Zhabko A.P., Shindyapin A.I., Provotorov V.V. Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes.* 2019;15(4):457–471. DOI: 10.21638/11702/spbu10.2019.404.
9. Malashonok N.A., Rybakov M.A. Symbolic-numerical solution of systems of linear ordinary differential equations with the required accuracy. *Zhurnal “Programmirovaniye” RAN = Journal “Programming” RAS.* 2013;3:38–46. (In Russ.).
10. Malashonok G.I., Rybakov M.A. Solution of systems of linear differential equations and calculation of dynamic characteristics of control systems in the MathPartner web service. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Ser. Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Bulletin of the Tambov University. Ser. Natural and technical sciences.* 2014;19(2):517–529. (In Russ.).
11. Rybakov M.A. On finding general and particular solutions of an inhomogeneous system of ordinary linear differential equations with constant coefficients. *Bulletin of the Tambov University. Ser. Natural and technical sciences.* 2012;17(2):552–565. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Рыбаков Михаил Анатольевич, старший преподаватель кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, Российская Федерация. **Mikhail A. Rybakov**, Senior Lecturer at Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation.

Российская Федерация.

e-mail: mixail08101987@mail.ru

ORCID: [0000-0001-8152-8357](https://orcid.org/0000-0001-8152-8357)

Статья поступила в редакцию 03.10.2023; одобрена после рецензирования 19.10.2023; принята к публикации 01.11.2023.

The article was submitted 03.10.2023; approved after reviewing 19.10.2023; accepted for publication 01.11.2023.