УДК 621.3.037.372.3
DOI: 10.26102/2310-6018/2025.49.2.026

Применение троичной сбалансированной системы счисления для повышения точности вычислений

В.М. Гиниятуллин, Д.В. Блинова✉, Т.Б. Купбаев

Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Российская Федерация

Резюме. В работе описано использование троичной сбалансированной системы счисления для вычисления элементов обратной матрицы для плохо обусловленных матриц. Обусловленность матрицы характеризует, насколько сильно решение системы линейных уравнений может изменяться в зависимости от малых возмущений в данных. Чем больше значение обусловленности, тем чувствительнее матрица к малым изменениям в данных. В качестве примера плохо обусловленной матрицы приводится матрица Гильберта размерностью три на три, для которой на основе известного выражения вычислены истинные значения элементов обратной матрицы. Приводится оценка погрешностей вычисления элементов обратной матрицы Гильберта, полученных с различной степенью точности вычислений в двоичной системе счисления (с помощью компьютера, программная реализация на языке Си) и в троичной сбалансированной системе счисления (вычисления проводились вручную). Сравнение результатов вычислений производится в десятичной системе счисления. Показано, что использование троичной сбалансированной системы счисления позволяет снизить погрешность вычислений элементов плохо обусловленной матрицы в несколько раз (в 3 и более раза на данных низкой точности и в 1,5 и более раз на более точных данных).

Ключевые слова: обратная матрица, матрица Гильберта, троичная сбалансированная система счисления, плохо обусловленная матрица, погрешность.

Для цитирования: Гиниятуллин В.М., Блинова Д.В., Купбаев Т.Б. Применение троичной сбалансированной системы счисления для повышения точности вычислений. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2025;13(2). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1889 DOI: 10.26102/2310-6018/2025.49.2.026

Using the ternary balanced number system to improve the accuracy of calculations

V.M. Giniyatullin, D.V. Blinova✉, T.B. Kupbaev

Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, the Russian Federation

Abstract. The paper describes the use of a ternary balanced number system for calculating the elements of the inverse matrix for ill-conditioned matrices. The conditionality of a matrix characterizes how strongly the solution of a linear equations system can change depending on small perturbations in the data. The higher the conditionality value, the more sensitive the matrix is to small changes in the data. As an example of an ill-conditioned matrix in this paper the three-by-three Hilbert matrix is considered. Based on the known expression, the true values of the elements of the inverse Hilbert matrix are calculated. An assessment of the errors in calculating the elements of the inverse Hilbert matrix, obtained with varying degrees of calculation accuracy in the binary number system (using a computer, software implementation in C language) and in the ternary balanced number system (calculations were performed manually), is given. Comparison of calculation results is performed in the decimal number system. It is shown that the use of a ternary balanced number system allows to reduce the calculation error of ill-conditioned matrices elements by several times (by 3 or more times for low-precision data and by 1,5 or more times for more precise data).

Keywords: inverse matrix, the Hilbert matrix, ternary balanced number system, ill-conditioned matrix, calculation errors.

For citation: Giniyatullin V.M., Blinova D.V., Kupbaev T.B. Using the ternary balanced number system to improve the accuracy of calculations. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2025;13(2). (In Russ.). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1889 DOI: 10.26102/2310-6018/2025.49.2.026

Введение

В различных областях научной и практической деятельности, таких как физическое моделирование и проектирование систем управления, применяется запись систем линейных алгебраических уравнений в матричном виде.

Однако решение линейных систем уравнений может оказаться затруднительным, если матрицы являются плохо обусловленными. В таких случаях малейшие ошибки в данных и вычислениях (например, округление) могут привести к значительным отклонениям в результате [1, 2].

Число обусловленности матрицы – это характеристика, которая показывает, насколько сильно решение системы линейных уравнений может изменяться в зависимости от малых возмущений в данных [3]. При значении обусловленности, близком к единице, матрица считается хорошо обусловленной, при значении обусловленности более тысячи, матрица считается плохо обусловленной.

Одной из сложностей при работе с плохо обусловленными матрицами является вычисление обратной матрицы, которое часто необходимо в практических задачах, например, в задачах расчета параметров динамических систем [4, 5].

Целью данной работы является повышение точности вычисления элементов обратной матрицы плохо обусловленных матриц за счет применения троичной сбалансированной системы счисления. Одной из основных задач исследования является проведение эксперимента оценки точности вычислений элементов обратной матрицы для двоичной и троичной сбалансированной систем счисления при изменении точности значений элементов исходной матрицы на примере матрицы Гильберта.

Матрица Гильберта как пример плохо обусловленной матрицы

Примером плохо обусловленной матрицы является матрица Гильберта – квадратная матрица с элементами [3]:

$$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \ \ i, j = 1,2,3, \dots n. \quad (1)$$

Матрица Гильберта размерностью 3×3 имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В [6] показано, что если число обусловленности равно 10^k, то возможна потеря до k цифр точности сверх того, что будет потеряно для числового значения из-за потери точности методов компьютерной арифметики.

Для нахождения обратной матрицы Гильберта используется выражение (3), позволяющее выразить ее в явном виде через биномиальные коэффициенты [7] и избежать ошибок округления при вычислениях:

$$(H^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j}(i+j-1)\binom{n+i-1}{n-j}\binom{n+j-1}{n-i}\binom{i+j-2}{i-1}^2, \quad (3)$$

где n – порядок матрицы; биномиальный коэффициент C_n^m записан в виде $\binom{m}{n}$.

Таким образом, все элементы обратной матрицы, вычисленные на основе (3), являются целыми числами:

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Наличие выражения, позволяющего вычислить истинные значения элементов обратной матрицы Гильберта, позволяет оценить точность вычислений, полученных с помощью универсальных численных методов [8].

В данной работе для вычисления значений элементов обратной матрицы используются элементарные преобразования методом Жордана-Гаусса[1].

Вычисление обратной матрицы ручным способом (вручную на бумаге) с использованием представления чисел в виде простых дробей позволяет получить такой же результат, как и с использованием формулы (3).

Оценка погрешности компьютерных вычислений обратной матрицы Гильберта

В данной работе для компьютерных вычислений элементов обратной матрицы [8] была написана программа на языке Си, использующая для переменных вещественный тип данных – представление числа в двоичной системе счисления с плавающей запятой в 32-битном формате: бит 31 – знак мантиссы, 30–23 биты – экспонента, 22–0 биты – мантисса без первой цифры [9].

Был проведен цикл вычислений, в котором отсекались младшие биты мантиссы при представлении данных (усечение применялось для исходных значений и результатов всех операций) для оценки накопления погрешности вычислений.

Если задействованы все 23 бита представления мантиссы, то значащая часть числа находится в диапазоне ±8388608, что соответствует 7 значащим цифрам в десятичном представлении числа. После преобразования в десятичную систему счисления исходная матрица и обратная к ней при таком представлении имеют вид, представленный на Рисунке 1.

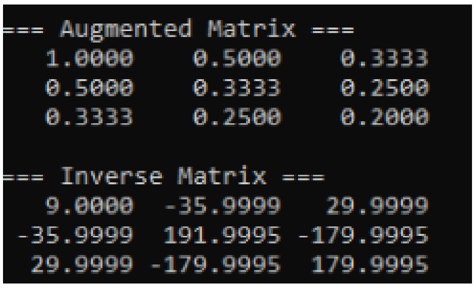

Рисунок 1 – Матрица Гильберта и обратная к ней в компьютерном представлении в виде короткого вещественного числа
Figure 1 – The Hilbert matrix and its inverse matrix in computing as a real type

Полученные таким образом значения элементов обратной матрицы почти соответствуют истинным значениям, но не являются абсолютно точными (погрешность составляет десятитысячные доли процента).

После усечения разрядов до 9 бит представления мантиссы, значащая часть числа находится в диапазоне ±512, что соответствует трем значащим цифрам в десятичном

[1] Пантина И.В., Куприянова М.А., Харитонов С.В. *Алгебра и теория чисел.* Москва: Синергия; 2016. 160 с.

представлении числа. Запись исходной матрицы и обратной к ней при таком представлении после преобразования в десятичную систему счисления приведены на Рисунке 2.

```
=== Augmented Matrix ===
   1.0000    0.5000    0.3330
   0.5000    0.3330    0.2500
   0.3330    0.2500    0.2000

=== Inverse Matrix ===
   9.6250  -39.3125   33.1250
 -40.3125  214.5000 -201.0000
  33.1250 -196.0000  195.0000
```

Рисунок 2 – Матрица Гильберта и обратная к ней в компьютерном представлении в виде короткого вещественного числа с усечением мантиссы до 9 бит
Figure 2 – The Hilbert matrix and its inverse matrix in computing as a real type with 9 bit truncated mantissa

Полученный результат показывает, что погрешность вычислений элементов обратной матрицы составляет от 7 до 12 %.

После усечения разрядов до 7 бит представления мантиссы в двоичной системе счисления, значащая часть числа находится в диапазоне ±128, что тоже соответствует трем значащим цифрам в десятичном представлении числа, но в двоичном представлении значения рассчитываются с меньшей точностью. Запись исходной матрицы и обратной к ней при таком представлении после преобразования в десятичную систему счисления приведены на Рисунке 3.

```
=== Augmented Matrix ===
   1.0000    0.5000    0.3320
   0.5000    0.3320    0.2500
   0.3320    0.2500    0.1992

=== Inverse Matrix ===
  13.3750  -59.5000   52.5000
 -69.5000  372.0000 -350.0000
  52.5000 -298.0000  292.0000
```

Рисунок 3 – Матрица Гильберта и обратная к ней в компьютерном представлении в виде короткого вещественного числа с усечением мантиссы до 7 бит
Figure 3 – The Hilbert matrix and its inverse matrix in computing as a real type with 7 bit truncated mantissa

Полученный результат показывает, что погрешность вычислений элементов обратной матрицы составляет от 48 % до 94 %.

После усечения разрядов до 5 бит представления мантиссы, значащая часть числа находится в диапазоне ±32, что соответствует двум значащим цифрам в десятичном представлении числа. Запись исходной матрицы и обратной к ней при таком представлении приведены на Рисунке 4.

Следует отметить, что представление мантиссы 6 и 4 битами также соответствует двум значащим цифрам в десятичном представлении, но для дальнейшего сравнения будет использовано представление с 5 знаками мантиссы.

Сравнивая полученную обратную матрицу с точными значениями обратной матрицы Гильберта, можно сделать вывод о погрешности вычислений более 100 % (от

250 % до 470 %) и, кроме того, присутствует симметричное изменение структуры знаков элементов матрицы.

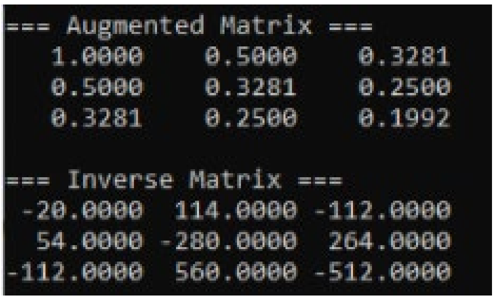

Рисунок 4 – Матрица Гильберта и обратная к ней в компьютерном представлении в виде вещественного числа с усечением мантиссы до 5 бит
Figure 4 – The Hilbert matrix and its inverse matrix in computing as a real type with 5 bit truncated mantissa

Исследование проблем погрешности компьютерных вычислений обратной матрицы Гильберта для различных размерностей приведено в [3], там же показано, что, начиная с некоторой размерности матрицы, возникает переполнение разрядной сетки и получение результата становится технически невозможно.

Использование троичной сбалансированной системы счисления для уменьшения погрешностей вычисления

В данной работе предлагается применение троичной сбалансированной системы счисления (ТСС) для дробных чисел в экспоненциальном формате и проведения вычислений при работе с плохо обусловленными матрицами.

Троичная сбалансированная система счисления – это позиционная система счисления, которая содержит в своем алфавите 3 символа: –1; 0; +1. Знаки перед единицами «встроены» в свои символы и иногда разряды ТСС-чисел так и именуются – «минус/плюс». Впервые ТСС была аппаратно реализована Н.П. Брусенцовым в ЭВМ «Сетунь» [10].

Для упрощения записи числа в ТСС вместо обозначения –1 можно использовать любой символ кроме 0 и 1, в данной работе используется символ 7. В работе [11] приведены некоторые примеры вычислений с использованием ТСС.

В данной работе все вычисления в троичной системе счисления производятся вручную и для удобства работы с числами используется следующая запись числа: мантисса, со значащим разрядом до запятой – в ТСС, экспонента в десятичной системе счисления – число три в соответствующей степени.

Матрица Гильберта размерностью 3×3 в ТСС с записью числа с округлением до 6 трит после запятой имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} 1{,}000000 \cdot 3^{0} & 1{,}777777 \cdot 3^{0} & 1{,}000000 \cdot 3^{-1} \\ 1{,}777777 \cdot 3^{0} & 1{,}000000 \cdot 3^{-1} & 1{,}717171 \cdot 3^{-1} \\ 1{,}000000 \cdot 3^{-1} & 1{,}717171 \cdot 3^{-1} & 1{,}771177 \cdot 3^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Путем элементарных преобразований получена обратная матрица:

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}017000 \cdot 3^{2} & 7{,}707171 \cdot 3^{3} & 1{,}011770 \cdot 3^{3} \\ 7{,}771001 \cdot 3^{3} & 1{,}711017 \cdot 3^{5} & 7{,}171777 \cdot 3^{5} \\ 1{,}177770 \cdot 3^{3} & 7{,}170111 \cdot 3^{5} & 1{,}717171 \cdot 3^{5} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Вычисления с точностью 6 трит после запятой в троичной сбалансированной системе счисления соответствуют диапазону чисел ±364 в десятичной системе, что сопоставимо с вычислениями, результаты которых приведены на Рисунках 2 и 3.

Перевод в десятичную систему счисления дает следующий результат:

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 9,(666) & -36,(740) & 30,(555) \\ -37,9753 & 198,(814) & -184,(333) \\ 31,(555) & -184,(666) & 182,(333) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Полученный результат позволяет заключить, что обратная матрица для плохо обусловленной матрицы Гильберта, вычисленная без использования специальных выражений для конкретных матриц, сохраняет структуру знаков, аналогично точной обратной матрице и имеет максимальную относительную погрешность вычислений 7,5 %, которая возникает на наименьшем элементе.

Учитывая то, что представление числа в ТСС с точностью 6 трит после запятой сопоставимо с вычислениями в двоичной системе счисления с усечением разрядов мантиссы до 9 и 7 бит, следует сравнить результаты, полученные в ТСС с результатами двух циклов компьютерных вычислений.

Сравнивая результат, полученный в ТСС, с результатами компьютерных вычислений, приведенных на Рисунке 2, можно отметить, что точность вычислений в ТСС выше в 1,6 и более раз. Сравнивая результат, полученный в ТСС, с результатами компьютерных вычислений, приведенных на Рисунке 3, можно отметить, что точность вычислений в ТСС выше в 6 и более раз.

Матрица Гильберта размерностью 3×3 в ТСС с записью числа с округлением до 4 трит после запятой имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} 1,0000 \cdot 3^0 & 1,7777 \cdot 3^0 & 1,0000 \cdot 3^{-1} \\ 1,7777 \cdot 3^0 & 1,0000 \cdot 3^{-1} & 1,7171 \cdot 3^{-1} \\ 1,0000 \cdot 3^{-1} & 1,7171 \cdot 3^{-1} & 1,7711 \cdot 3^{-1} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Путем элементарных преобразований получена обратная матрица:

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0110 \cdot 3^1 & 7,1177 \cdot 3^3 & 1,7107 \cdot 3^3 \\ 7,1707 \cdot 3^2 & 1,0077 \cdot 3^4 & 7,1111 \cdot 3^5 \\ 1,1777 \cdot 3^1 & 7,0117 \cdot 3^4 & 1,7777 \cdot 3^5 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Вычисления с точностью 4 значащих цифр в троичной сбалансированной системе счисления соответствуют диапазону чисел ±40 в десятичной системе, что сопоставимо с вычислениями, результаты которых приведены на Рисунке 4.

Перевод в десятичную систему счисления дает следующий результат:

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 3,4 & -16(370) & 20,6 \\ -7,1 & 77,1 & -123 \\ 3,5 & -70 & 123 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Полученный результат позволяет заключить, что при использовании ТСС сохраняется структура знаков обратной матрицы, погрешность вычислений элементов полученной обратной матрицы для плохо обусловленной матрицы Гильберта составляет от 32 % до 89 %.

Сопоставляя результаты, полученные при вычислении в ТСС и результаты компьютерных вычислений, можно заключить, что при достаточно низкой точности вычислений ТСС позволяет получить результат, превышающий по точности компьютерные вычисления в 3 и более раз.

Заключение

Предложенный подход вычисления значений элементов обратной матрицы на основе троичной сбалансированной системы счисления для плохо обусловленных матриц на примере матрицы Гильберта показал свою высокую эффективность. Применение ТСС позволяет повысить точность вычислений более чем в 1,5 раза при расчетах с точностью в три значащие цифры в десятичном представлении числа и более чем в 3 раза при расчетах с точностью в две значащие цифры. Независимо от точности в ТСС сохраняется структура знаков обратной матрицы.

Анализ эффективности применения ТСС для более широкого круга плохо обусловленных матриц требует поиска таких эталонных матриц, для которых обратная матрица представлена целочисленными элементами, сравнение с которой позволит сделать выводы о погрешности вычислений. Поиск таких плохо обусловленных матриц является следующим шагом исследований.

Для оценки возможности применение ТСС в других областях необходимо реализовать программный эмулятор, позволяющий производить вычисления в ТСС. Это направление видится авторам перспективным и представляет тему дальнейших работ.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Калиткин Н.Н., Юхно Л.Ф., Кузьмина Л.В. Количественный критерий обусловленности систем линейных алгебраических уравнений. *Математическое моделирование*. 2011;23(2):3–26.
Kalitkin N.N., Yukhno L.F., Kuzmina L.V. The Quantitative Conditionality Criterium for the Systems of Linear Algebraic Equations. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2011;23(2):3–26. (In Russ.).
2. Кашапова Л.А., Степанова М.Д., Толстых О.Д. К вопросу об обусловленности матриц и устойчивости линейных алгебраических систем. *Молодая наука Сибири*. 2021;(2). URL: https://mnv.irgups.ru/sites/default/files/articles_pdf_files/kashapova_stepanova_tolstyh.pdf
Kashapova L.A., Stepanova M.D., Tolstykh O.D. On the Question of Matrix Conditionality and Stability Linear Algebraic Systems. *Young Science of Siberia*. 2021;(2). (In Russ.). URL: https://mnv.irgups.ru/sites/default/files/articles_pdf_files/kashapova_stepanova_tolstyh.pdf
3. Майстренко А.В., Светлаков А.А., Черепанов Р.О. Исследование свойств матрицы Гильберта и причин ее плохой обусловленности. *Омский научный вестник*. 2011;(3):265–269.
Maystrenko A.V., Svetlakov A.A., Cherepanov R.O. The Analysis of Properties of Hilbert Matrix and the Reasons for its Weak Conditionality. *Omsk Scientific Bulletin*. 2011;(3):265–269. (In Russ.).
4. Молодцов В.С. Методы нахождения обратных матриц распределительных электрических сетей энергосистем. *Известия высших учебных заведений. Электромеханика*. 2018;61(3):60–67. https://doi.org/10.17213/0136-3360-2018-3-60-67
Molodtsov V.S. A Method for Finding the Inverse Matrix Electricity Distribution. Networks Power Systems. *Russian Electromechanics*. 2018;61(3):60–67. (In Russ.). https://doi.org/10.17213/0136-3360-2018-3-60-67
5. Партко С.А., Грошев Л.М., Сиротенко А.Н. Проектирование мобильных машин моделированием динамических нагрузок на узлах их приводов. *Вестник Донского государственного технического университета*. 2020;20(2):155–161. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2020-20-2-155-161

Partko S.A., Groshev L.M., Sirotenko A.N. Mobile Machine Design Through Dynamic Load Simulation on Their Drive Units. *Vestnik of Don State Technical University*. 2020;20(2):155–161. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2020-20-2-155-161

6. Cheney E.W., Kincaid D.R. *Numerical Mathematics and Computing*. Thomson Brooks/Cole; 2008. 784 p.
7. Фукс Д.Б., Фукс М.Б. Арифметика биномиальных коэффициентов. *Квант*. 1970;(6):17–25.
8. Форсайт Дж., Молер К. *Численное решение систем линейных алгебраических уравнений*. Москва: Мир; 1969. 168 с.
   Forsythe G.E., Moler C.B. *Computer Solution of Linear Algebraic Systems.* Moscow: Mir; 1969. 168 p. (In Russ.).
9. Зубков С.В. *Assembler для DOS, Windows и UNIX*. Москва: ДМК Пресс; 2000. 608 с.
10. Брусенцов Н.П., Маслов С.П., Розин В.П., Тишулина А.М. *Малая цифровая вычислительная машина «Сетунь»*. Москва: Изд-во МГУ; 1965. 145 с.
11. Гиниятуллин В.М., Салихова М.А. Эффект компенсации ошибок округления в троично-сбалансированной системе счисления. *Вестник кибернетики.* 2020;(4):14–20. https://doi.org/10.34822/1999-7604-2020-4-14-20
    Giniyatullin V.M., Salikhova M.A. Effect of Rounding Error Compensation in the Ternary Balanced Number System. *Proceedings in Cybernetics.* 2020;(4):14–20. (In Russ.). https://doi.org/10.34822/1999-7604-2020-4-14-20

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Гиниятуллин Вахит Мансурович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Вычислительная техника и инженерная кибернетика», Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Российская Федерация.
e-mail: fentazer@mail.ru
ORCID: 0000-0002-4686-2752

Vakhit M. Giniyatullin, Candidate of Engineering Sciences, Docent, Associate Professor at the Computer Science and Engineering Cybernetics Department, Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, the Russian Federation.

Блинова Дарья Викторовна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Вычислительная техника и инженерная кибернетика», Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Российская Федерация.
e-mail: blinova.darya@gmail.com

Darya V. Blinova, Candidate of Engineering Sciences, Docent, Associate Professor at the Computer Science and Engineering Cybernetics Department, Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, the Russian Federation.

Купбаев Токежан Бауыржанулы, магистрант кафедры «Вычислительная техника и инженерная кибернетика», Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Российская Федерация.
e-mail: kupbaev2016@gmail.com

Tokezhan B. Kupbaev, Master's Degree student at the Computer Science and Engineering Cybernetics Department, Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 14.04.2025; одобрена после рецензирования 15.05.2025; принята к публикации 21.05.2025.

The article was submitted 14.04.2025; approved after reviewing 15.05.2025; accepted for publication 21.05.2025.